Musterlösung Schnellübung 4

1. Auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist k stetig. An der Stelle 0 gilt $k(0) = 1 = \lim_{x \to 0^-} k(x)$ und $\lim_{x \to 0^+} k(x) = \alpha \cdot 0 + t \cdot 0 + r = r$. Daher ist k stetig an der Stelle 0 für $\alpha, t \in \mathbb{R}$ und $r = 1$.

Ausserdem gilt $k'(x) = 100x^{99}$ für $x < 0$ und der linksseitige Limes $\lim_{x \to 0^-} k'(x) = 0$ existiert. Für $x > 0$ gilt

$$k'(x) = \frac{\alpha}{100} x^{1/100-1} + te^{-1/x}x^{-2} = \frac{\alpha}{100} x^{-99/100} + t\frac{e^{-1/x}}{x^2}\,.$$

Wir wollen nun $\lim_{x \to 0^+} k'(x)$ berechnen. Es gilt $\lim_{x \to 0^+} t\frac{e^{-1/x}}{x^2} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ausserdem sehen wir, dass

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha}{100} x^{-99/100} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 0\,, \\ -\infty & \text{falls } \alpha < 0\,, \\ 0 & \text{falls } \alpha = 0\,, \end{cases}$$

ist. Dann gilt für $\alpha = 0$ und $t \in \mathbb{R}$, dass $\lim_{x \to 0^+} k'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} k'(x)$ ist. Wir schliessen, dass k differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ für $\alpha = 0, t \in \mathbb{R}$ und $r = 1$ ist.

2. **a)** Wir berechnen mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x\log(x)}\right) = e^{-x\log(x)}\frac{d}{dx}(-x\log(x)) = x^{-x}(-\log(x) - 1).$$

b) Mit der Kettenregel und dem Ergebnis aus Teil (a) folgt:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos\left(x^{-x}\right)\right) = -\sin\left(x^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right) = \sin\left(x^{-x}\right)x^{-x}\left(\log(x) + 1\right).$$

c) Es gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}e^{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2xe^{x^2}\right) = \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + 2\sqrt{x}\right)e^{x^2}.$$

d) Es folgt direkt

$$f'(x) = \frac{1}{x\log(x)}.$$

Bitte wenden!

e) Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}\arctan(x) + \frac{1}{1-x^4}.$$

f) Es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x),$$

also folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}. \tag{1}$$

Aber $\sin$ ist streng monoton steigend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ also ist $\arcsin$ streng monoton steigend auf $(-1,1)$. Es folgt

$$\arcsin'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (-1,1). \tag{2}$$

Damit folgt mit $\cos^2 + \sin^2 = 1$ und (1)

$$(\arcsin'(x))^2 = \frac{1}{\cos^2(\arcsin(x))} = \frac{1}{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \frac{1}{1-x^2}. \tag{3}$$

Folglich gilt wegen (2) und (3)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Der Definitionsbereich von g wird durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \log(\arctan x + 1) \neq 0 \end{cases}$$

bestimmt. Wir bekommen somit

$$\begin{cases} \arctan x > -1 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x > \tan(-1) = -\tan(1) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

und daher ist der Definitionsbereich $(-\tan(1), 0) \cup (0, \infty)$.

Für $x > 0$ gilt $g(x) < 0$; für $-\tan(1) < x < 0$ gilt $g(x) > 0$. Ferner ist es nicht schwierig zu sehen, dass

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \infty\,,$$

d.h. $x = 0$ ist eine vertikale Asymptote von g.

Siehe nächstes Blatt!

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \to (-\tan(1))^+} g(x) = 0^+ , \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \frac{-1}{\log\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)} .$$

Somit sehen wir, dass $y = \frac{-1}{\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}$ eine horizontale Asymptote ist und dass die Funktion g stetig fortsetzbar ist an der Stelle $x = -\tan(1)$.

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$g'(x) = \frac{1}{\log^2(\arctan x + 1)} \cdot \frac{1}{\arctan x + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} ,$$

was positiv ist genau dann, wenn $\arctan x + 1 > 0$ ist. Wir schliessen, dass für alle x in dem Definitionsbereich $g'(x) > 0$ ist. Daher ist g streng monoton wachsend auf $(-\tan(1), 0)$ und $(0, \infty)$.

Von oben wissen wir, dass g unbeschränkt ist und somit keine Extrema besitzt.

Zuletzt gibt es keine kritischen Punkte.