Musterlösung Schnellübung 5

1. Es gilt $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[16]{e}$. Betrachte die Funktion $f(x) = e^{x^2}$. Die n-te Taylor-Entwicklung von f um den Punkt $a = 0$ lautet:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Dabei ist das Restglied im Punkt $x = \frac{1}{4}$ gleich

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

für ein $\tau \in (0, 1/4)$. Wir müssen n so wählen, dass gilt $|R_n(1/4)| < 5 \cdot 10^{-3}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= (4x^2+2)e^{x^2} & f''(0) &= 2\\
f'''(x) &= (8x^3+12x)e^{x^2} & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= (16x^4+48x^2+12)e^{x^2} & f^{(4)}(0) &= 12
\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung $e^{1/16} \leq \sqrt[16]{4} = \sqrt[8]{2} \leq \sqrt{2} \leq 3/2$ folgt

$$|R_3(1/4)| \leq \frac{(16/4^4 + 48/4^2 + 12) \cdot (3/2)}{4!} (1/4)^4 \leq \frac{1}{4^4} \leq 5 \cdot 10^{-3}.$$

Für $n = 3$ lautet das Taylorpolynom

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 = 1 + x^2.$$

Dessen Wert an der Stelle $x = 1/4$ liefert die gesuchte Näherung

$$1 + \frac{1}{4^2} = 1.0625$$

(Der wahre Wert ist $f(1/4) = 1.0644944\ldots$)

2. Wir zeigen zunächst durch Induktion nach $n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = F_n(x) e^{-x^2} \tag{1}$$

Bitte wenden!

mit einem Polynom F_n vom Grad n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial.

`Induktionschritt` $n \to n+1$. Wir setzen zur Abkürzung $D = \frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} D^{n+1}e^{-x^2} &= D(D^n e^{-x^2}) = D(F_n(x)e^{-x^2}) \\ &= F_n'(x)e^{-x^2} - F_n(x)2xe^{-x^2} \\ &= (-2xF_n(x) + F_n'(x))e^{-x^2} =: F_{n+1}(x)e^{-x^2}\,, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Aus (1) folgt nun, dass

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} = (-1)^n F_n(x)$$

ein Polynom n-ten Grades ist.

Wir zeigen jetzt, dass H_n die Hermitesche Differentialgleichung löst. Es genügt offenbar, die Gleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

für die Funktion $y = e^{x^2} D^n e^{-x^2}$ nachzuweisen. Es gilt $e^{-x^2}y = D^n e^{-x^2}$. Nun ist

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2}y) &= D^{n+2}e^{-x^2} = D^{n+1}(De^{-x^2}) \\ &= D^{n+1}(-2xe^{-x^2}) \\ &\overset{(*)}{=} -2xD^{n+1}e^{-x^2} - 2(n+1)D^n e^{-x^2} \\ &= -2xD(e^{-x^2}y) - 2(n+1)e^{-x^2}y \\ &= e^{-x^2}(4x^2y - 2xy' - 2(n+1)y)\,, \end{aligned}$$

wobei an der Stelle $\overset{(*)}{=}$ die Rechenregel

$$D^{n+1}(xf(x)) = xD^{n+1}f(x) + (n+1)D^n f(x)\,,$$

benutzt wurde. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} D^2(e^{-x^2}y) &= e^{-x^2}y'' + 2(De^{-x^2})y' + (D^2e^{-x^2})y \\ &= e^{-x^2}(y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y)\,. \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\,.$$

3. **a)** Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 7\lambda - 15$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $-\frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{109}\right)$ und $-\frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{109}\right)$. Die allgemeine Lösung ist deshalb $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{109}\right)x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\left(7-\sqrt{109}\right)x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 1$$

hat die Nullstellen $1, -1, i, -i$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

c) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4$$

hat die doppelten Nullstellen $i\sqrt{(}2)$, sowie $-i\sqrt{(}2)$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = (c_1 + c_2 x)\cos(\sqrt{2}x) + (c_3 + c_4 x)\sin(\sqrt{2}x)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

d) Das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2$$

hat die Nullstellen 0 (doppelt), sowie $1 + 2i$ und $1 - 2i$. Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 + c_2 x + \Big\{c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)\Big\} e^x$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.