Musterlösung Schnellübung 6

1. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2\log x)}{x^2} \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{1}$$

Lösungsweg 1: Der Ansatz $y(x) = x^\alpha$ führt zu dem Indexpolynom

$$\text{inp}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha + 4 == \alpha^2 + 4.$$

Dies hat die Nullstellen $\pm 2i$. Dies liefert die zwei linear unabhängigen komplexen Lösungen x^{2i} und x^{-2i}. Reelle Lösungen erhalten wir mit

$$\mathcal{R}e(x^{2i}) = \mathcal{R}e(e^{\log(x)2i}) = \cos(2\log(x))$$

und

$$\mathcal{I}m(x^{2i}) = \mathcal{I}m(e^{\log(x)2i}) = \sin(2\log(x)).$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist somit

$$y(x) = C_1 \cos(2\log(x)) + C_2 \sin(2\log(x))$$

für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Mit dem Ansatz

$$y_p(x) = A\log(x)\cos(2\log(x)) + B\log(x)\sin(2\log(x))$$

erhalten wir die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{\log x}{4}\sin(2\log(x)).$$

Die allgemeine Lösung von (1) ist somit

$$y(x) = C_1 \cos(2\log(x)) + C_2 \sin(2\log(x)) + \frac{\log(x)}{4}\sin(2\log(x))\,.$$

Lösungsweg 2: Nehmen wir an, dass $y(x)$ eine Lösung von dieser Differentialgleichung ist. Definieren wir

$$x(t) := e^t\,,$$

Bitte wenden!

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(x(t)) &= y'(x(t))\frac{dx(t)}{dt} = y'(x(t))e^t = y'(x(t))x(t),\\
\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(y'(x(t))x(t)\right) = y''(x(t))x(t)\frac{d}{dt}x(t) + y'(x(t))\frac{d}{dt}x(t)\\
&= y''(x(t))(x(t))^2 + y'(x(t))x(t).
\end{aligned}$$

Da $y(x)$ ein Lösung der Differentialgleichung ist, folgt, dass die Funktion $k(t) := y(x(t))$ die Differentialgleichung

$$e^{-2t}\left(\ddot{k}(t) + 4k(t)\right) = \cos(2t)e^{-2t}$$

löst, d.h.

$$\ddot{k}(t) + 4k(t) = \cos(2t)\,.$$

Diese Differentialgleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$\text{chp}(\lambda) = \lambda^2 + 4.$$

Die Nullstellen von $\text{chp}(\lambda)$ sind

$$\lambda_1 = 2i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2i.$$

Somit ist die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$k_h(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\,.$$

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatzt

$$k_p(t) = t\left(\alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t)\right)\,.$$

Das liefert nun

$$-4\alpha\sin(2t) + 4\beta\cos(2t) = \cos(2t)\,,$$

d.h. $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{1}{4}$.

Die allgemeine Lösung ist somit

$$k(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t)\,.$$

Da $t = \log(x)$ und $k(t) = y(x(t)) = y(e^t)$ folgt $y(x) = k(\ln(x))$. Die allgemeine Lösung von (1) ist somit

$$y(x) = C_1\cos(2\log(x)) + C_2\sin(2\log(x)) + \frac{\log(x)}{4}\sin(2\log(x))\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Substitution $u := \log x$, $du = \frac{1}{x}dx$;
Integrationsgrenzen $x = e \mapsto u = \log(e) = 1$, $x = e^2 \mapsto u = \log(e^2) = 2$: Also gilt

$$\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\, dx = \int_1^2 u^2\, du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_{u=1}^{2} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\,.$$

Bem.: Man kann auch direkt benutzen, dass der Integrand die Form $f(x)^2 \cdot f'(x) = \frac{1}{3}(f(x)^3)'$ hat und daher die Funktion $\frac{1}{3}\log(x)^3$ eine Stammfunktion ist.

b) Substitution $u := 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$.
Integrationsgrenzen: Während x von -1 nach 1 läuft, läuft $u = 1 + x^2$ von 2 nach 1 (bei $x = 0$) und wieder zurück nach 2. Also:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx &= \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \\ &= \int_2^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\, du + \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\, du \\ &= -\int_1^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\, du + \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\, du \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\, dx &= -\frac{1}{3}\cos(3x-\pi/4)\Big|_{x=0}^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{3}\cos\frac{5\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} \\ &= 2\frac{1}{3}\cos(\pi/4) = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

d) Wir integrieren partiell, bis wir statt eines Polynoms nur noch einen konstanten Faktor im Integral haben.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \overset{\downarrow}{t^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh}(2t)\;\; dt &= \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(2t)t\; dt \\ &= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\left[\cosh(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \cosh(2t)dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sinh(2) - \Big(\frac{1}{2}\cosh(2) - \left[\frac{1}{4}\sinh(2t)\right]_0^1\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sinh(2) - \frac{1}{2}\cosh(2) + \frac{1}{4}\sinh(2) = \frac{1}{4}(3\sinh(2) - 2\cosh(2)) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}(e^2 - e^{-2}) - e^2 - e^{-2}) = \frac{1}{8}(e^2 - 5e^{-2}).\end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. **a)** Mit Substitution $t = 1 - x$ folgt

$$\begin{aligned}
I(p,q) &= \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx \\
&= \int_1^0 (1-t)^p (1-(1-t))^q \, (-1) dt \\
&= -\int_1^0 (1-t)^p t^q \, dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^p t^q \, dt \\
&= I(q,p)
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
I(p,q) &= \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^q \, dx + \int_0^1 (x^p - x^{p+1})(1-x)^q \, dx \\
&= I(p+1,q) + I(p,q+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(p+1,q) &= \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^q \, dx \\
&= \left[-\frac{1}{q+1} x^{p+1} (1-x)^{q+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{p+1}{q+1} x^p (1-x)^{q+1} \, dx \\
&= \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)
\end{aligned}$$

c) Die erste Gleichung nach $I(p, q+1)$ auflösen und in die zweite einsetzen liefert:

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1} \big(I(p,q) - I(p+1,q) \big)$$

Wir können nun diese Gleichung nach $I(p+1,q)$ auflösen. Es folgt

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{p+q+2} I(p,q).$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir lösen die Aufgabe per Induktion in p. Fixiere $q \geq 0$. Es gilt

$$I(0,q) = I(q,0) = \int_0^1 x^q\,dx = \frac{1}{q+1}.$$

Angenommen die Aussage gilt für ein $p \geq 0$. Dann gilt die Aussage auch für $p+1$, weil

$$\begin{aligned} I(p+1,q) &= \frac{p+1}{p+q+2} I(p,q) \\ &= \frac{p+1}{p+q+2} \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \\ &= \frac{(p+1)!q!}{((p+1)+q+1)!}. \end{aligned}$$

Die Aussage folgt per Induktion.

4. **a)** Mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g(s) &:= \int_0^s \cos^3(t)\,dt \quad \text{und} \\ h(x) &:= x^3 \end{aligned}$$

gilt $f(x) = g(h(x))$. Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $g(s)$ differenzierbar mit $g'(s) = \cos^3(s)$. Aus der Kettenregel folgt daher

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \cos^3\left(x^3\right) \cdot 3x^2.$$

b) Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist $f(x)$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos(x))$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos(\cos(x)) > 0$. Also ist $f(x)$ stetig und streng monoton wachsend und deshalb eine bijektive Funtion von $\mathbb{R}$ nach image$(f) \subset \mathbb{R}$. Es gilt $f(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert also:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos(\pi))} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos(1)}.$$