Musterlösung Schnellübung 7

1. **a)** Das Integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\xi\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_{x=2}^{x=\xi} = \lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi) - \ln(\ln 2)\right)$$

konvergiert nicht, denn

$$\lim_{\xi\to\infty}\left(\ln(\ln\xi)\right) = \infty.$$

b) Die Substitution $u = \ln x$ ergibt $du = \frac{dx}{x}$, also

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_2^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln\xi}\frac{du}{u^2} = \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\ln 2}^{u=\ln\xi}$$
$$= \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln\xi} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Der im Vergleich zu Teil a) im Nenner hinzugekommene Faktor $\ln x$ bewirkt also eine Konvergenz des Integrales.

c) Wir substituieren $u = x^2$, so dass $du = 2xdx$ und

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\xi^2}\frac{du}{2\sqrt{1+u^2}}$$
$$= \lim_{\xi\to\infty}\left[\frac{1}{2}\mathrm{ArSinh}\,u\right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to\infty}\mathrm{ArSinh}\,\xi^2 = \infty.$$

Dieses Integral divergiert also ebenfalls.

2. **a)** Die Funktion $x \mapsto \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ist auf $\mathbb{R}$ definiert, stetig und positiv. Wegen $\cosh(-x) = \cosh x$ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\cosh x} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\cosh x} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\cosh x} = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\cosh x}$$

falls letzeres Integral konvergiert. Für $x > 0$ gilt

$$e^x + e^{-x} \geq e^x \geq \frac{x^2}{2}.$$

Bitte wenden!

Daher gilt
$$\frac{1}{\cosh x} \leq \frac{4}{x^2}$$
für alle hinreichend grossen x. Desweiteren können wir Division durch Null ausschliessen, da $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert das Integral also.

b) Die Funktion $x \mapsto \frac{\tan x}{x}$ ist auf $]0, \pi/2[$ definiert und stetig. Das Integral teilt sich auf in die beiden Integrale
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx \text{ und } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx.$$
Mit der Regel von de l'Hôpital folgt
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x)}{1} = 1.$$
Daher setzt sich die Funktion stetig fort auf $[0, \frac{\pi}{4}]$, und $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{x}\, dx$ wird ein gewöhnliches Riemann-Integral.

Für das andere Integral substituieren wir $x = \frac{\pi}{2} - y$ mit $dx = -dy$. Das liefert
$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan x}{x}\, dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\pi/4}^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\tan x}{x}\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\tan(\pi/2-y)}{\pi/2-y}\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\cos y}{(\pi/2-y)\cdot \sin y}\, dy\,.\end{aligned}$$
Für alle $y \in]0, \pi/4]$ gilt nun
$$\left\{\begin{array}{l} \sin y \leq y \\ \cos y \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cos y}{(\pi/2-y)\cdot\sin y} \geq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{y}.$$
Nach dem Minorantenkriterium divergiert das Integral also.

c) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-x^3}}$ ist auf $]0, 1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1.

An der Stelle 0: Es gilt $\sqrt{x-x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum
$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{4}\right)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Siehe nächstes Blatt!

für jedes $x \in]0, \frac{1}{2}]$. Also konvergiert das Integral an der Stelle 0.

An der Stelle 1: Es gilt $\sqrt{x - x^3} = \sqrt{x(1-x^2)} = \sqrt{x(1+x)(1-x)}$, und darum

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-x^3}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1-x)}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-x)}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

für jedes $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Also konvergiert das Integral an der Stelle 1.

Daher konvergiert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

d) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^4 - x^5}$ ist auf $]0, 1[$ definiert und stetig. Es gibt Probleme an den Stellen 0 und 1. Bei 0 haben wir

$$\frac{1}{x^4 - x^5} = \frac{1}{x^4(1-x)} \geq \frac{1}{x^4}$$

für jedes $x \in]0, 1[$. Also divergiert das Integral bei 0. Ein ähnliches Problem besteht an der Stelle 1.

3. **a)** Die Differentialgleichung

$$y' - x^2 y = \cos(x)$$

ist von der Form

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

für $P(x) = -x^2$ und $Q(x) = \cos(x)$. Somit können wir folgende Lösungsformel aus der Vorlesung verwenden:

$$y(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{A(t)}\, dt,$$

wobei $b \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, x_0 beliebig gewählt werden kann und

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)\, dt.$$

Wir berechnen also

$$A(x) = \int_0^x P(t)\, dt = \int_0^x (-t^2)\, dt = [-\frac{1}{3}t^3]_0^x = -\frac{1}{3}x^3.$$

Bitte wenden!

Es folgt

$$y(x) = be^{\frac{1}{3}x^3} + e^{\frac{1}{3}x^3} \int\limits_0^x \cos(t) e^{-\frac{1}{3}t^3}\, dt$$

mit $b \in \mathbb{R}$.

b) Die Differentialgleichung

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

ist wieder von der Form

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

für $P(x) = 2x$ und $Q(x) = 2xe^{-x^2}$. Wir verwenden wieder die Lösungsformel von oben, wobei wir diesmal $x_0 = 1$ und $b = 3$ aus den Anfangsbedingungen verwenden. Wir berechnen

$$A(x) = \int\limits_1^x 2t\, dt = x^2 - 1.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} y(x) &= 3e^{-(x^2-1)} + e^{-(x^2-1)} \int_1^x 2te^{-t^2} e^{t^2-1}\, dt \\ &= 3e^{-(x^2-1)} + e^{-(x^2-1)} \frac{2}{e} \int_1^x t\, dt \\ &= 3e^{-(x^2-1)} + e^{-(x^2-1)} \frac{1}{e}(x^2-1) \\ &= e^{-x^2}\left(3e - 1 + x^2\right). \end{aligned}$$

4. a) Für konstante Lösungen ist $y' = y^2 - 1 = 0$, das heisst $y = \pm 1$ identisch.

Für nicht konstante Lösungen berechnen wir mithilfe Separation der Variablen

$$\begin{aligned} y' &= y^2 - 1 \\ \frac{dy}{dx} &= y^2 - 1 \\ \frac{dy}{y^2-1} &= dx \\ \int \frac{dy}{y^2-1} &= \int dx \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}\,.$$

Mit $(y-1)$ multiplizieren und danach $y=1$ einsetzen $\Rightarrow A = \frac{1}{y+1}\Big|_{y=1} = \frac{1}{2}$.

Mit $(y+1)$ multiplizieren, dann $y=-1$ einsetzen $\Rightarrow B = \frac{1}{y-1}\Big|_{y=-1} = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy &= \int dx \\
\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= x+c \\
\left|\frac{y-1}{y+1}\right| &= e^{2c}e^{2x} \\
\frac{y-1}{y+1} &= C\,e^{2x} \qquad C = \pm e^{2c} \text{ beliebig} \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
y &= \frac{1+C\,e^{2x}}{1-C\,e^{2x}}\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für $C=0$ liefert dies die bereits bekannte konstante Lösung $y=1$.

b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist stets ungleich 0, es gibt daher keine konstanten Lösungen. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x+y} = e^x \cdot e^y \\
\frac{dy}{dx} &= e^x \cdot e^y \\
e^{-y}\,dy &= e^x\,dx \\
\int e^{-y}\,dy &= \int e^x\,dx \\
-e^{-y} &= e^x - c \\
y &= -\log\left(c - e^x\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Lösungen existieren nur für $c>0$.

c) Damit diese Differentialgleichung

$$(\log y)\left(1+\sqrt{x}\right)y' - \left(1-\sqrt{x}\right)y = 0$$

Bitte wenden!

wohldefiniert ist, müssen $x > 0$ und $y > 0$ sein. Somit liefert formale Separation der Variablen

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{y' \log y}{y} \,.$$

Integrieren ergibt

$$\int_0^x \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\, dt = \int_0^x \frac{y'(t)\log(y(t))}{y(t)}\, dt$$

Auf der linken Seite substituieren wir $z = \sqrt{t}$, $dz = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ und erhalten

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{-z^2+z}{1+z}\, \mathrm{d}z &= 2\left(-\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{\sqrt{x}} + 2z\Big|_0^{\sqrt{x}} - 2\log(1+z)\Big|_0^{\sqrt{x}} \right) \\ &= -x + 4\sqrt{x} - 4\log\left(1+\sqrt{x}\right) \,, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{(-z^2+z)}{(1+z)} = -z + 2 - \frac{2}{1+z}$$

benutzt haben. Auf der rechten Seite berechnet sich das Integral zu

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{y'(t)\log(y(t))}{y(t)}\, dt &= \int_0^x \frac{1}{2}\left[\log^2 y(t)\right]'\, dt \\ &= \frac{1}{2}\log^2(y(t))\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{2}\log^2(y(x)) - \frac{1}{2}\log^2(y(0)) \\ &= \frac{1}{2}\log^2(y(x)) - \frac{1}{2}\log^2 2 \,. \end{aligned}$$

Es gilt also die Gleichung

$$\frac{1}{2}\log^2 y(x) = -x + 4\sqrt{x} - 4\log\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}\log^2 2$$

und folglich

$$\log y(x) = \left(-2x + 8\sqrt{x} - 8\log\left(1+\sqrt{x}\right) + \log^2 2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Beachte, dass die Erfüllung der Anfangsbedingung nur durch die positive Wurzel gewährleistet ist. Die Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = \exp\left(\left(-2x + 8\sqrt{x} - 8\log\left(1+\sqrt{x}\right) + \log^2 2\right)^{\frac{1}{2}}\right) .$$