Serie 11

1. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0$$

zu der Anfangsbedingung $y(1) = y'(1) = 2$.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x.$$

3. Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante f verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz ν angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

4. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = 0 \quad \text{für} \quad x > 0\,.$$

auf zwei Arten:

a) Mithilfe der Substitution $x(t) = e^t$.

b) Mithilfe des Ansatzes $y(x) = x^\alpha$.

Bitte wenden!

5. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie die Aussage zuerst für monoton steigende Funktionen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Sei $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir schreiben $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Die Obersumme ist

$$S_+(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

und die Untersumme ist

$$S_-(f, \mathcal{Z}) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}).$$

Vereinfachen Sie $S_+(f, \mathcal{Z})$ und $S_-(f, \mathcal{Z})$ für monoton steigende Funktionen (ohne $\sup$ und $\inf$).

b) Sei

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max\{x_k - x_{k-1} | k = 1, \cdots n\}.$$

Begründen Sie, wieso die Grenzwerte $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_-(f, \mathcal{Z})$ und $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_+(f, \mathcal{Z})$ existieren (in $\mathbb{R}$).

c) Zeigen Sie

$$0 \leq S_+(f, \mathcal{Z}) - S_-(f, \mathcal{Z}) \leq (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{Z}).$$

d) f ist Riemann-integrierbar, falls die Grenzwerte $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_-(f, \mathcal{Z})$ und $\lim_{\delta(\mathcal{Z}) \to 0} S_+(f, \mathcal{Z})$ übereinstimmen. Schliessen Sie die Riemann-integrierbarkeit für monoton steigende Funktionen aus (b) und (c).

Abgabe: Donnerstag, 6. Dezember 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

Siehe nächstes Blatt!

6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 6. Dezember 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$,

(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, du$,

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\, dx$,

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\, dt$.

Bemerkung: In der Vorlesung haben Sie bereits das Riemann-Integral

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx,$$

für $a \leq b$ kennen gelernt. In dieser Aufgabe wird aber schon das bestimmte Integral definiert mithilfe einer "Stammfunktion" von f benutzt. Die Notation für dieses Integral ist $\int_a^b f(x)\, dx$ und es ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere ist $a > b$ erlaubt und es gilt

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Sie werden die genaue Definition, sowie den Zusammenhang zum Riemann-Integral nächste Woche in der Vorlesung sehen.

b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist;} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

(a) integrierbar, weil sie beschränkt ist.

(b) nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.

(c) integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.

(d) nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0,1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.