Serie 2

1. Gegeben sei die Formel $f(x) := \sqrt[4]{3 - \sqrt{10 - \sqrt{x}}}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend und deshalb injektiv ist auf $\operatorname{dom}(f)$. Bestimmen Sie den Bildbereich $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wurzelfunktion

$$[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

streng monoton wachsend ist.

c) Finden Sie einen Ausdruck für die Umkehrfunktion $f^{-1} : \operatorname{im}(f) \to \operatorname{dom}(f)$.

2. Seien X und Y Mengen und betrachten Sie eine Abbildung $f : X \to Y$. Für eine gegebene Teilmenge B von Y ist das *Urbild von B unter f* die Teilmenge $f^{-1}(B)$ von X, die durch die Formel

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

gegeben ist.

Für eine gegebene Teilmenge A von X kann man analog den Begriff des *Bilds von A unter f* definieren: sie ist die Teilmenge $f(A)$ von Y, die durch die Formel

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

geben ist.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

c) $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

Bitte wenden!

d) Ist im Allgemeinen wahr, dass $f(A^c) = f(A)^c$ gilt? Falls ja, beweisen Sie die Aussage, falls nein, finden Sie ein Gegenbeispiel!

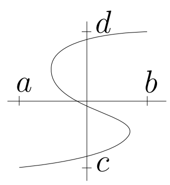
3. **a)** Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(i) von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

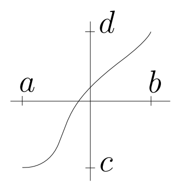
(ii) von $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\}$ nach $\{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n^3 \leq 100\}$?

(iii) von $\{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ in das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$?

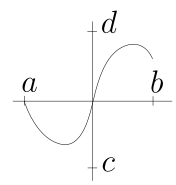
b) Sind die folgenden Abbildungen Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$? Ist diese Funktion, sofern sie existiert, surjectiv, injektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.



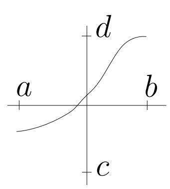
(i) Abb 1



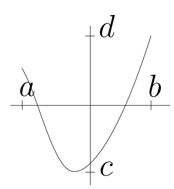
(ii) Abb 2



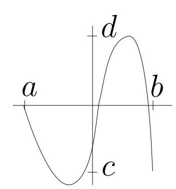
(iii) Abb 3



(iv) Abb 4



(v) Abb 5



(vi) Abb 6

Abgabe: Donnerstag, 4. Oktober 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

Siehe nächstes Blatt!

4. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag, 4. Oktober 2018 um 20:00 Uhr.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen, so dass gilt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) f ist injektiv,

(b) f ist surjektiv,

(c) g ist injektiv,

(d) g ist surjektiv,

(e) $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

b) Eine reelle Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = h(x)$$

gilt, und sie heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = -h(x)$$

gilt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) fg ist gerade.

(b) fg ist ungerade.

(c) fg^2 ist gerade.

(d) $f + g$ ist gerade.

c) Die Umkehrfunktion (Inverse) von $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^4$ ist...

(a) $x^{\frac{1}{4}}$.

(b) existiert nicht.

(c) $\frac{1}{4}x$.

(d) x^{-4}.

(e) $-x^4$.

Bitte wenden!

d) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

(a) $f : [\,0,\pi\,] \to [\,0,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(b) $f : [\,0,\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(c) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(d) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$

e) Welche der folgenden Funktionen sind surjektiv?

(a) $f : [\,0,\pi\,] \to [\,0,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(b) $f : [\,0,\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(c) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(d) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$

f) Welche der folgenden Funktionen sind bijektiv?

(a) $f : [\,0,\pi\,] \to [\,0,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(b) $f : [\,0,\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(c) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to [\,-1,1\,]$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$
(d) $f : [\,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\,] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x) := \sin(x)$