Serie 3

1. **a)** Zeigen Sie mittels des Epsilon-Delta-Kriteriums, dass die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

stetig ist.

b) Zeigen Sie: Falls $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, so ist auch $\max(f,g)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x))$ stetig.

2. Eine auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz stetig* mit Lipschitz-Konstante $K \geq 0$ falls

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in D\,.$$

a) Man zeige: Jede Lipschitz stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Zeigen Sie: Für $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $f_r\colon [-r, r] \to \mathbb{R},\ f_r(x) = x^n$ Lipschitz stetig und somit stetig.

c) Folgern Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ stetig ist.

d) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht Lipschitz stetig ist, falls $n \geq 2$.

3. Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) := \begin{cases} 3\sqrt{-x} + 1, & \text{falls } x < 0; \\ cx + d, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1; \\ x^{10} - 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass f überall stetig ist.

4. Sei $b \in \mathbb{R}$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - b^2}{x - b}, & \text{falls } x \neq b; \\ 0, & \text{falls } x = b. \end{cases}$$

a) Existiert $g(b)$?

Bitte wenden!

b) Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to b} g(x)$?

c) Ist $g(x)$ stetig im Punkt $x = b$?

Abgabe: Donnerstag, 11. Oktober 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 11. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$.

(a) existiert nicht,
(b) ∞,
(c) $\frac{5}{7}$,
(d) 0.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{|x - 2| + |x^2 - 4|}$.

(a) existiert nicht,
(b) ∞,
(c) $-\frac{4}{5}$,
(d) 0.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

(a) $\frac{1}{6}$,
(b) ∞,
(c) -3,
(d) 1

d) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv?

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := xyz$.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto f(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x + y)$.
(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x - y)$.

Siehe nächstes Blatt!

e) Welche der folgenden Funktionen sind surjektiv?

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := xyz$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto f(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x + y)$.

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x - y)$.