

## Serie 4

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2},$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 19x - 20}{|x-1| + (x-1)\sqrt{x}},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \{ \pi \cos (\sin(x)) \},$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left( e^2 + \sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x} \right),$

e)  $\lim_{x \rightarrow 100} (x - 100) \sin \left( \frac{1}{x-100} \right).$

2. Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heisst *Nullfolge*, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Zeigen Sie, dass jede Nullfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ , die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

3. (a) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

4. a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{(4n^2-1)n}{3}.$$

**Bitte wenden!**

b) Seien  $n, k$  natürliche Zahlen mit  $n \geq k$ . Beweisen Sie

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$

*Tipp:* Fixieren Sie  $k$  und benutzen Sie Induktion über  $n$ .

**Abgabe:** Donnerstag, 18. Oktober 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

## 5. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online bis Donnerstag 18. Oktober 20:00.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

- a) Die Asymptote(n) der Funktion  $f(x) := \frac{x^3+2}{e^x+x^2}$  ist / sind...
- (a) Die Gerade  $y = x$  für  $x \rightarrow -\infty$  und die horizontale Gerade bei  $y = 0$  für  $x \rightarrow \infty$ ,
  - (b) Nur die Gerade  $y = x$  für  $x \rightarrow -\infty$ ,
  - (c) Nur die Gerade  $y = x$  für  $x \rightarrow \infty$
  - (d) Die Funktion  $f(x)$  besitzt keine Asymptoten.
- b) Die Asymptote(n) der Funktion  $f(x) := \frac{3x+5x^2}{x-4}$  ist / sind...
- (a) Die Funktion  $f(x)$  besitzt keine Asymptoten,
  - (b) Die Gerade  $y = 5x + 23$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und die vertikale Gerade bei  $x = 4$ ,
  - (c) Die Gerade  $y = 5x$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und die vertikale Gerade bei  $x = 3$ ,
  - (d) Nur die Gerade  $y = 5x$  für  $x \rightarrow -\infty$ .
- c) Der Grenzwert von  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x}{x} + \frac{x-1}{x} \right)$  ist...
- (a)  $\infty$ ,
  - (b) 0,
  - (c) 1,
  - (d) 2,
  - (e) Existiert nicht.