

Serie 4

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi x + 3}{x^2 + \pi^2},$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 19x - 20}{|x-1| + (x-1)\sqrt{x}},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \{ \pi \cos (\sin(x)) \},$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(e^2 + \sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x} \right),$

e) $\lim_{x \rightarrow 100} (x - 100) \sin \left(\frac{1}{x-100} \right).$

2. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst *Nullfolge*, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass jede Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + a_n} - 1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

erfüllt.

3. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

4. a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{(4n^2-1)n}{3}.$$

b) Seien n, k natürliche Zahlen mit $n \geq k$. Beweisen Sie

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$

Tipp: Fixieren Sie k und benutzen Sie Induktion über n .

Abgabe: Donnerstag, 18. Oktober 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 18. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

- a) Die Asymptote(n) der Funktion $f(x) := \frac{x^3+2}{e^x+x^2}$ ist / sind...
- (a) Die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow -\infty$ und die horizontale Gerade bei $y = 0$ für $x \rightarrow \infty$,
 - (b) Nur die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow -\infty$,
 - (c) Nur die Gerade $y = x$ für $x \rightarrow \infty$
 - (d) Die Funktion $f(x)$ besitzt keine Asymptoten.
- b) Die Asymptote(n) der Funktion $f(x) := \frac{3x+5x^2}{x-4}$ ist / sind...
- (a) Die Funktion $f(x)$ besitzt keine Asymptoten,
 - (b) Die Gerade $y = 5x + 23$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und die vertikale Gerade bei $x = 4$,
 - (c) Die Gerade $y = 5x$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und die vertikale Gerade bei $x = 3$,
 - (d) Nur die Gerade $y = 5x$ für $x \rightarrow -\infty$.
- c) Der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{x} + \frac{x-1}{x} \right)$ ist...
- (a) ∞ ,
 - (b) 0,
 - (c) 1,
 - (d) 2,
 - (e) Existiert nicht.