D-ITET | Analysis I | HS 2018

Prof. Alessandra Iozzi

Serie 5

1. Sei $0 < x_k < 1$ für $1 \le k \le n$ und $n \ge 2$. Beweisen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \ge 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k. \qquad \text{(P(n))}$$

2. Sei A eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist A noch oben beschränkt, so ist $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ nach unten beschränkt und $\inf(-A) = -\sup(A)$.

b) Ist $\inf(A) > 0$, so ist $A^{-1} = \{x^{-1} \,|\, x \in A\}$ nach oben beschränkt und $\sup(A^{-1}) = (\inf\ A)^{-1}$.

3. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$:

a) $a_n = \frac{n^2+5n}{3n^2-2}$,

b) $a_n = n(-1)^n$,

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

d) $a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$.

4. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

`Hinweis`: Benutzen Sie die Bernoullische-Ungleichung: Sei $x \ge -1$. Dann gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$,

Bitte wenden!

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$.

Abgabe: Donnerstag, 25. Oktober 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 25. Oktober 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ ist...

(a) existiert nicht,
(b) 1,
(c) ∞,
(d) $\frac{1}{2}$,
(e) 0.

b) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$A = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

zu?

(a) 1 ist das Supremum von A.
(b) 1 ist das Maximum von A.
(c) 0 ist das Infimum von A.
(d) 0 ist das Minimum von A.

c) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Menge

$$B = \left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\};$$

zu?

(a) 1 ist das Supremum von B.
(b) B hat kein Maximum.
(c) $-\infty$ ist das Infimum von B.
(d) ∞ ist das Infimum von B.

Siehe nächstes Blatt!

d) Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

(a) Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind. Daher divergiert die Reihe.

(b) Die Folge (a_n) konvergiert gegen Null. Daher konvergiert die Reihe $\sum a_n$.

(c) Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton. Daher konvergiert die Reihe.

(d) Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert. Daher konvergiert die Reihe absolut.