Serie 6

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius ϱ der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^4}\, x^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(7n))^n x^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\pi^n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$.

2. **a)** Beweisen Sie die partielle Summationsregel

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k).$$

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Hinweis: Der schwierige Fall ist $|z| = 1$: Für $z = 1$ erhält man die bekannte harmonische Reihe. Für $z \neq 1$ können Sie Teil (a) mit $a_k = 1 + z + \cdots z^{k-1} = \dfrac{1 - z^k}{1 - z}$ und $b_k = \dfrac{1}{k}$ verwenden.

3. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für z in Normalform ($d.h.$ in der Form $z = a + i\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$):

a) $z = (5 + 3i)(7 - 2i)$

b) $z = \frac{6-i}{5+2i}$

c) $z^3 = i$

d) $z = (1 + i)^5$

e) $z = \frac{9-4i}{2+3i}$

f) $z^2 + 1 - i = 0$

Bitte wenden!

4. Skizzieren Sie die Lösungesmengen von

a) $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$

b) $|z| = \mathrm{Re}(z) + 1$

c) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 2$

d) $|z-2| + |z+2| = 5$

e) $\mathrm{Im}\left(\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right|\right) = 0$

f) $\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+1}\right| = 1$

5. Berechnen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^5 + \bar{z} = 0\,.$$

6. Finden Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$|z|^2 - z|z| + z = 0\,.$$

Abgabe: Donnerstag, 1. November 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

7. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 1. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $i^2 = -1.$
(b) $\frac{1}{i} = -i.$
(c) $i^3 = -i.$
(d) $i^{17} = i.$
(e) $\frac{1}{i^4} = -1.$

b) Für die komplexe Zahl $z = \frac{1+4i}{4+i}$ gilt...

(a) $z = i.$
(b) $z = \frac{8-15i}{17}.$
(c) $z = \frac{8-15i}{15}.$
(d) $z = \frac{15i}{17}.$

c) Sei $z = 2 - 3i$. Welches ist die der Imaginärteil der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}$?

(a) 3.

Siehe nächstes Blatt!

(b) -3.
(c) $3i$.
(d) $-3i$.

d) Für die komplexe Zahl $z = (2-i)^3$ gilt...

(a) $z = 8 + i$.
(b) $z = 2 - 11i$.
(c) $z = 8 - i$.
(d) $z = 2 - 13i$.

e) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^{327}$ ist...

(a) $327i$.
(b) $-i$.
(c) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{327}$.
(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.