Serie 7

1. Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!} z^n$, mit $a \in \mathbb{Q}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n + 3^n} z^n$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n$.

f) (optional) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$.

2. Finden Sie die Inverse der bijektiven Funktion

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \sinh(x).$$

3. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ ist a^z definiert durch

$$a^z := e^{z \log(a)}.$$

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $z, w \in \mathbb{C}$:

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^{z+w} = a^z a^w$

d) $(a^x)^z = a^{xz}$

e) $(ab)^z = a^z b^z$

f) $|a^z| = a^{\mathrm{Re}(z)}$

4. Zeigen Sie die Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Eulersche Formel* $\exp(\boldsymbol{i}x)^k = \cos(kx) + \boldsymbol{i}\sin(kx)$ *für* $x \in \mathbb{R}$*, sowie:*

$$\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

für $z \in \mathbb{C}$.

Bitte wenden!

5. **a)** Verwenden Sie (Ab5) aus dem Skript, um

$$\frac{d}{dy}\log(y) = \frac{1}{y}$$

zu zeigen.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $\log(x^9)$.

c) Finden Sie die Tangente an den Graphen der Funktion

$$f:\ (0,\infty)\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x^9),$$

an der Stelle $x = e$.

Abgabe: Donnerstag, 8. November 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 8. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Es seien $a > 1$ und $b > 1$ reelle Zahlen und es seien Funktionen $e_a, e_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto a^x$ bzw. $x \mapsto b^x$. Dann unterscheiden sich e_a und e_b ...?

(a) um eine additive Konstante.
(b) um eine multiplikative Konstante.
(c) durch eine Stauchung oder Streckung in Richtung der x-Achse.
(d) nur durch das Vorzeichen.

b) Es seien $a > 1$ und $b > 1$ zwei reelle Zahlen. Dann unterscheiden sich die Funktionen $\log_a, \log_b :\ ]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ...

(a) um eine additive Konstante.
(b) um eine multiplikative Konstante.
(c) so stark, dass man sie gesondert untersuchen muss.
(d) nur durch das Vorzeichen.

c) Welche der folgenden Aussagen gilt für reelle Zahlen $a, b > 0$?

(a) $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$.
(b) $\log(ab) = \log(a)\log(b)$.
(c) $\log(a+b) = \log(a)\log(b)$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Welche der folgenden Aussagen gilt für reelle Zahlen $a, b > 0$?

(a) $\exp\left(\frac{1}{a}\right) = -\exp(a)$.

(b) $\exp(ab) = \exp(a)\exp(b)$.

(c) $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.