D-ITET Analysis I HS 2018
Prof. Alessandra Iozzi

Serie 9

Auf einem separaten Blatt können Tipps nachgelesen werden. Versuchen Sie, die Tipps so wenig wie möglich zu benutzen. Wenn Sie einen Hinweis zu einer Aufgabe brauchen, lesen Sie nicht gleich alle Hinweise, sondern versuchen Sie die Aufgabe mit so wenigen Hinweisen wie möglich zu lösen!

1. **a)** Finden Sie die Taylorreihen von $\frac{1}{2+x}$, $\frac{1}{x-1}$ and $\frac{1}{x-3}$ in der Nähe von 0. Sie dürfen bekannte Taylorreihen verwenden.

b) Finden Sie die Taylorreihe von $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in $x = 0$.

c) Berechnen Sie den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$f : (-2, 2) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{\sin x}{2 + x}\,,$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschliesslich des Gliedes 5. Ordnung.

2. Wir wollen mit einem Fehler kleiner als $(100!)^{-1}$ mit Hilfe des Taylor-Polynoms $\sin 1$ berechnen. Bis zu welcher Ordnung müssen wir das Taylor-Polynom berechnen?

3. **a)** Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $g(x) = e^{x^2+4x}$ in $x = 0$.

b) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion: $f(x) = e^{x^2-4}$ in $x = 2$.

4. Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Grenzwert zu zeigen:

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \geq 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \log(1 + x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1 + x)^n}.$$

Bitte wenden!

b) Folgern Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

die Taylorreihe von $\log(1+x)$ um $x = 0$ ist.

c) Zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq \xi \leq x$ die Abschätzung

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

gilt, wobei $f(x) = \log(1+x)$.

d) Folgern Sie aus dem Satz 3.54 aus dem Skript, dass für alle $0 \leq x \leq 1$

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

gilt.

e) Folgern Sie daraus (1).

Abgabe: Donnerstag, 22. November 2018 bis 13:00, in den Fächlein des jeweiligen Übungsleiters im HG F 28.

5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online bis Donnerstag 22. November 20:00.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

a) Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(a) $(1-x)^{-1}$.
(b) $(1-x)^{-2}$.
(c) $(1+x)^{-2}$.
(d) $x \cdot (1-x)^{-2}$.
(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.
(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

Siehe nächstes Blatt!

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

c) Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(a) $\sin(x) + \sinh(x)$.

(b) $x \sin(x) + \frac{1}{x} \sinh(x)$.

(c) $x \sin(x) + x \sinh(x)$.

(d) $x \cos(x) + \frac{1}{x} \cosh(x)$.