Schnellübung 2

1. Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe. Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$.

Q.E.D.

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Identitäten für alle $n \in \mathbb{N}$.

a)

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\,,$$

b)

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\,, \text{ für } n \geq 2$$

c)

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = c, \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

a) Angenommen $c > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)g(x)) = -\infty.$$

b) Angenommen $c = 0$. Geben Sie je ein Beispiel, wo

(i) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = \infty$.

(ii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 1$.

(iii) $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = 0$.