

Schnellübung 5

1. Berechnen Sie die Zahl $\sqrt[16]{e}$ bis auf einen Fehler von $5 \cdot 10^{-3}$. Benutzen Sie dafür die Taylorreihe der Funktion $f(x) = e^{x^2}$.

2. Man zeige, dass

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

ein Polynom n -ten Grades ist und die Hermitesche Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

löst.

Bemerkung: Um die Aufgabe zu lösen, kann es nützlich sein, diese Formel zu benutzen:

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} (xf(x)) = x \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} f(x) + (n+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x),$$

wobei f eine $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion ist.

3. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für die folgenden Differentialgleichungen

a) $y''(x) + 7y'(x) - 15y(x) = 0,$

b) $y^{(4)}(x) - y(x) = 0,$

c) $y^{(4)}(x) + 4y''(x) + 4y(x) = 0,$

d) $y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 5y''(x) = 0.$