D-MATH
Prof. Alessandra Iozzi

Analysis I D-ITET

HS 2018

Schnellübung 6

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \frac{4y(x)}{x^2} = \frac{\cos(2\log x)}{x^2} \quad \text{für} \quad x > 0\,.$$

`Hinweis`: Benutzen Sie die Substitution $x = e^t$ oder den Ansatz $y(x) = x^a$.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log^2 x}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3x - \pi/4)\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{1} t^2 \cdot \cosh(2t)\, dt$

3. Betrachten Sie das Integral

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx$$

her, wobei p und q ganze Zahlen ≥ 0 sind.

a) Zeigen Sie, dass $I(p,q) = I(q,p)$.

b) Zeigen Sie die Beziehungen

$$I(p,q) = I(p+1,q) + I(p,q+1)$$

und

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1).$$

c) Folgern Sie, daraus die Rekursionsformel

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{p+q+2} I(p,q).$$

Bitte wenden!

d) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \geq 0$

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

4. **a)** Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \int_0^{x^3} \cos^3(t)\, dt.$$

b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$ für $f(x) = \displaystyle\int_\pi^x \cos(\cos(t))\, dt.$