Lösung - Schnellübung 3

1. **a)** Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w| - a}{2}}\right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

Lösung:

a) Da $z_1^2 = z_2^2$ gilt, reicht es, die Behauptung für z_1 zu beweisen. Beachte zuerst, dass die Bedingung $b \neq 0$ impliziert $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ und somit $|w| + a \geq |a| + a \geq 0$. Analog, $|w| - a \geq 0$. Insbesondere sind die beide Zahlen $\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$ und $\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$ reell.

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{|w| - a}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{|w| + a}{2} + 2i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{(|w| + a)(|w| - a)}{4}} - \mathrm{sgn}(b)^2\frac{|w| - a}{2} \\ &= \frac{|w| + a}{2} - \frac{|w| - a}{2} + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{(|w| + a)(|w| - a)} = a + i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{|w|^2 - a^2} \\ &= a + i\mathrm{sgn}(b) \cdot |b| = a + ib, \end{aligned}$$

da $\mathrm{sgn}(b) \cdot |b| = b$ gilt.

Bemerkung: Für $b = 0$, die Lösungen der Gleichung $z^2 = a$ sind gegeben durch

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a}, \quad \text{falls } a \geq 0$$

und

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{-a}, \quad \text{falls } a < 0.$$

b) In diesem Beispiel gilt $|w| = 5$, $a = -3$ und $\mathrm{sgn}(b) = 1$. Einsetzen ergibt

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} + i\sqrt{\frac{5 + 3}{2}}\right) = \pm(1 + 2i).$$

Beachten Sie, dass diese Formel hier von grossem Nutzen ist, da das Rechnen in Polarform deutlich mühsamer ist (der Polarwinkel ist nicht einfach darstellbar).

Bitte wenden!

2. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sin(3x) + 4\sin(x)^3 - 3\sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass $f''(x) + 9f(x) = 0$.
(*Bemerkung*: Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, welche später in der Vorlesung noch behandelt werden wird.)

b) Benutzen Sie die Additionsformeln für $\sin$ und $\cos$ um zu zeigen, dass $f(x) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichheit $-\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(3x) + 12\sin(x)^2\cos(x) - 3\cos(x) \\ f''(x) &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\cos(x)^2 + 3\sin(x). \end{aligned}$$

Mit $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f''(x) &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\cos(x)^2 + 3\sin(x) \\ &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 + 24\sin(x)\left(1 - \sin(x)^2\right) + 3\sin(x) \\ &= -9\sin(3x) - 12\sin(x)^3 - 24\sin(x)^3 + 24\sin(x) + 3\sin(x) \\ &= 9\left(-\sin(3x) - 4\sin(x)^3 + 3\sin(x)\right) = -9f(x) \end{aligned}$$

und somit $f''(x) + 9f(x) = 0$.

b) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x), \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Deshalb

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x), \\ \cos(2x) &= \cos(x + x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2, \\ \sin(2x) &= \sin(x + x) = 2\sin(x)\cos(x). \end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= \sin(2x + x) = (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + \sin(x)\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x)\left(1 - \sin(x)^2\right) - \sin(x)^3 \\ &= 3\sin(x) - 4\sin(x)^3. \end{aligned}$$

und deshalb folgt $f(x) = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir benutzen den Tipp um $f(x+\frac{\pi}{2})$ zu berechnen,

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3x+3\frac{\pi}{2}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3-3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left((3x+\pi)+\frac{\pi}{2}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3-3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(3x+\pi)+4\cos(x)^3-3\cos(x) \\ &= -\cos(3x)+4\cos(x)^3-3\cos(x). \end{aligned}$$

Wegen Teilaufgabe **b)** wissen wir, dass $f(x+\frac{\pi}{2})=0$ und somit folgt

$$-\cos(3x)+4\cos(x)^3-3\cos(x)=0$$

wie gewünscht.

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls f eine gerade Funktion ist, dann ist f' eine ungerade Funktion.

Lösung:

Aus $f(x)=f(-x)$ folgt durch beidseitiges Ableiten $f'(x)=-f'(-x)$. D.h. $f'(-x)=-f'(x)$. Also ist f' ungerade.

4. Berechnen Sie $f'\colon D(f)\to\mathbb{R}$ für

a) $f\colon [-1,1]\to[0,\pi],\ x\mapsto \arccos(x)$;

b) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \left(x^{\frac{1}{3}}+\sin\left(\arctan(x)\right)\right)^{2017}$;

c) die Umkehrfunktion f von $g\colon (0,+\infty)\to(0,2),\ x\mapsto 2e^{-x^2}$.

Lösung:

a) Mittels der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen wir

$$f'(x)=\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}.$$

Weil $\arccos x\in[0,\pi]$ für alle $x\in[-1,1]$ gilt $\sin(\arccos x)\geq 0$ für alle $x\in[-1,1]$ und deshalb

$$\frac{1}{-\sin(\arccos(x))}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es gilt also

$$\arccos(x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) Aus Serie 2 Aufgabe 9d) wissen wir, dass

$$\sin(\arctan(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Bitte wenden!

und deshalb gilt

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{2017}.$$

Somit berechnen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2017 \left(\frac{1}{3x^{2/3}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x} \right)^{2016} \\ &= 2017 \left(\frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[3]{x} \right)^{2016}. \end{aligned}$$

c) Weil

$$2e^{-\left(\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\right)^2} = 2e^{-\ln\left(\frac{2}{x}\right)} = 2\frac{1}{\frac{2}{x}} = x,$$

ist die Funktion f gegeben durch $x \mapsto \sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}$. Man kann f nun einfach direkt ableiten oder die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion benutzen. Weil gilt

$$g'(x) = -4xe^{-x^2},$$

berechnen wir mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'(x) = \frac{1}{-4f(x)e^{-f(x)^2}} = \frac{1}{-4\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}\frac{x}{2}} = \frac{1}{-2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}}.$$