Lösung - Serie 13

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

√ (a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Die Taylorreihe der Summe $f+g$ zweier Funktionen ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f+g)^{(k)}(x-x_0)}{k!}$. Wegen $(f+g)^{(k)}(x-x_0) = f^{(k)}(x-x_0) + g^{(k)}(x-x_0)$ ist die erste Antwort die richtige.

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

(a) 0

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) ∞

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Also ist (b) richtig.

Bitte wenden!

3. Es sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $P_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

√ (a) $1 + \frac{x^2}{2}$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 + x + x^2$

(d) $1 + x^2$

Nach Definition ist mit $x_0 = 0$ das zweite Taylor-Polynom

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Es ist $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$, sodass alle vier Polynome möglich sind. Es ist mit Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2},$$

und damit $f'(0) = 0$ und es bleiben noch zwei Kandidaten. Mit Kettenregel und wieder mit Quotientenregel gilt

$$f''(x) = \frac{(e^x x)'(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - e^x x 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Setzen wir direkt 0 ein, so ist $f''(0) = 1$. Also $T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

4. Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$\checkmark$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

Dank der geometrischen Reihe haben wir für $|x-1| < 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots =$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k.$$

Die Reihe konvergliert für $|x-1| < 1$; ihr Konvergenzintervall ist also $(0;2)$.

5. In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(-1)^{k+1}(2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1,2)$

(b) $(-4,5)$

(c) $(-2,2)$

$\checkmark$ (d) $(-2,3)$

Es sei $z = (2x-1)^2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass der Konvergenzradius bezüglich z gleich

$$\left| \lim_{k\to\infty} \frac{k^3(-1)^{k+1}5^{2k+2}}{(k+1)^3(-1)^{k+2}5^{2k}} \right| = \left| \lim_{k\to\infty} \frac{25k^3}{(k+1)^3} \right| = 25$$

ist. Folglich konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn $z = (2x-1)^2 < 25$ ist, also wenn $-2 < x < 3$ gilt. Um den Beweis abzuschliessen reicht es zu zeigen, dass die Potenzreihe für $x \in \{-2, 3\}$ nicht konvergiert. Dies folgt aber daraus, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^3$ divergiert.

Bitte wenden!

6. Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sinh(x)$;

b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

Lösung:

a) Wir wissen

$$(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

also gilt $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$. Allgemeiner gilt $(\sinh(x))^{(2k)} = \sinh(x)$ für alle $k \geq 0$ und $(\sinh(x))^{(2k-1)} = \cosh(x)$ für alle $k \geq 1$.

Weil $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$, überleben in der Taylorreihe von $\sinh(x)$ nur die ungeraden Terme. Tatsächlich gilt

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots .$$

b) Die Taylorreihe von $\ln(1 + x)$ bzgl. des Punkts $x = 0$ lautet

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Daraus folgt

$$\ln(1 + x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{4k+4}}{k+1}.$$

Für $x^2 \ln(1 + x^4)$ ergibt sich also die Reihenentwicklung

$$x^2 \ln(1 + x^4) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{4k+6}.$$

7. Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Lösung: Wegen $e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}}{t^2} = \frac{1 - \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \cdots\right)}{t^2} \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2(n-1)}}{n!}. \end{aligned}$$

Gliedweise Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^x t^{2(n-1)} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)n!} x^{2n-1}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

8. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Reihenentwicklung

$$e^x \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k.$$

Hinweis: Setzen Sie $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ein, multiplizieren Sie aus und verwenden Sie die Exponentialreihe.

Lösung: Mit $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ folgt, dass $e^x \cos x = \frac{1}{2}(e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)})$. Mit der Exponentialreihe erhalten wir

$$\begin{aligned}
e^x \cos x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-i)^k x^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})^k \frac{x^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2})^k \frac{1}{2} (e^{i\frac{\pi}{4}k} + e^{-i\frac{\pi}{4}}) \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{k/2}}{k!} \cos\big(k\pi/4\big)}_{=\, c_k} x^k.
\end{aligned}$$

Man beachte noch

$$\cos\big(k\pi/4\big) = \begin{cases} 1 & k \equiv 0 \pmod 8 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & k \equiv 1, 7 \pmod 8 \\ 0 & k \equiv 2, 6 \pmod 8 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & k \equiv 3, 5 \pmod 8 \\ -1 & k \equiv 4 \pmod 8 \end{cases}$$

Also:

$$c_k = \frac{1}{k!} \cdot \begin{cases} 2^{k/2} & k \equiv 0 \pmod 8 \\ 2^{(k-1)/2} & k \equiv 1, 7 \pmod 8 \\ 0 & k \equiv 2, 6 \pmod 8 \\ -2^{(k-1)/2} & k \equiv 3, 5 \pmod 8 \\ -2^{k/2} & k \equiv 4 \pmod 8). \end{cases}$$

9. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

Lösung: Wir stellen fest, dass wir den Nenner der gegebenen Funktion faktorisieren können als

$$1 - x + x^2 - x^3 = (1 - x)(1 + x^2).$$

Bitte wenden!

Wir machen daher für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$f(x) = \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Sortieren nach Potenzen von x liefert

$$2 = \underbrace{(A-B)}_{\stackrel{!}{=}0} x^2 + \underbrace{(B-C)}_{\stackrel{!}{=}0} x + \underbrace{(A+C)}_{\stackrel{!}{=}2}.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen linker und rechter Seite finden wir $A = B = C = 1$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet daher

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Die geometrische Reihe liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = (1+x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) + (1+x)(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) \\ &= (1+x)(2 + 2x^4 + 2x^8 + 2x^{12} + \cdots) \\ &= (1+x)\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum_{k=0}^{\infty}(2x^{4k} + 2x^{4k+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 4k \text{ und } n = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Konvergenzradius der Potenzreihendarstellung von $f(x)$ ist identisch mit dem Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2x^{4k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2(x^4)^k$ im Zwischenergebnis. (Da eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergiert, hat der Vorfaktor $(1+x)$ keinen Einfluss.) Um den Konvergenzradius letzterer Reihe zu bestimmen, substituieren wir $x^4 =: y$ und erhalten damit die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2y^k$, deren Konvergenzradius offensichtlich 1 beträgt. Die Potenzreihe für $f(x)$ konvergiert also, falls $|x^4| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Ihr Konvergenzradius beträgt demnach ebenfalls 1.

10. Berechnen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$;

Siehe nächstes Blatt!

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$.

Lösung:

a) Wir benutzen die Definition des Konvergenzradius

$$\begin{aligned}\varrho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\Big/\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\Big/\frac{n!}{(n+1)^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-e, e)$.

b) Wir setzen die Koeffizienten $a_n = \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}$ in die Formel für den Konvergenzradius ein und

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n}}{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{5^{(n+1)^2}(n+1)^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\frac{5^{(n+1)^2}}{5^{n^2}}\\ &= e\lim_{n\to\infty}5^{n^2+2n+1-n^2} = \infty.\end{aligned}$$

Die Potenzreihe besitzt demnach den Konvergenzradius ∞, konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Die Formel für den Konvergenzradius lässt sich hier leider nicht direkt anwenden, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich Null sind.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}x^{2n} &= 9x^2 + \frac{9^2}{2}x^4 + \cdots\\ &= 0\cdot x + 9x^2 + 0\cdot x^3 + \frac{9^2}{2}x^4 + 0\cdot x^5 + \cdots\end{aligned}$$

Wir betrachten daher statt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}x^{2n}$ zunächst die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}y^n$. Aus letzterer erhält man die ursprüngliche Potenzreihe zurück, indem man $y := x^2$ einsetzt. Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe lauten $a_n = \frac{9^n}{n}$. Damit erhalten wir für deren Konvergenzradius

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{9^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{9}.$$

Die Ersatzreihe konvergiert also für $|y| < \frac{1}{9}$. Wegen des Zusammenhangs $y = x^2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{3}$. Also ist der Konvergenzbereich gegeben durch $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

d) Der Konvergenzradius beträgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Da wir um den Punkt $x_0 = -3$ entwickeln konvergiert die Potenzreihe also sicher für

$$x \in (-3-1/2, -3+1/2) = (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$$