

Serie 7

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 14.11.2018 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 14.11.2018* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: <https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/>

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

- (a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \rightarrow 0^+$
- (b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \rightarrow 0^+$
- (c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \rightarrow 0^+$
- (d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o(x^{1/3})$ für $x \rightarrow +\infty$
- (e) $\sin^2(x) \ln^3(x) = o(\ln^3(x))$ für $x \rightarrow +\infty$

2. Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x) + 2 \sin(x)$.

- (a) 2.61
- (b) 1.73
- (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- (d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bitte wenden!

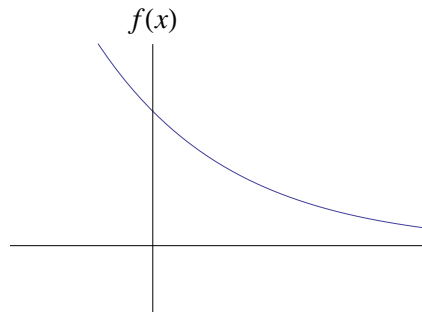
3. Sei

$$f: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

- (a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.
- (b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0, 6]$.
- (c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0, 6]$.
- (d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0, 6]$.

4. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f . Was lässt sich über f , f' und f'' sagen?



- (a) Die erste Ableitung f' ist positiv.
- (b) Die erste Ableitung f' ist negativ.
- (c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.
- (d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

Siehe nächstes Blatt!

5. a) Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

- b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

6. Die Hyperbolische Funktionen \sinh und \cosh sind wie folgt definiert:

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, wo sie sinnvoll sind:

c) $2 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

d) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

e) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

7. Ordnen Sie die folgenden sechs Funktionen nach ihren Größenordnungen, wenn $x \rightarrow +\infty$ strebt.

a) $\ln(\ln(x^2))$

b) $\ln(e^x - x)$

c) x^2

d) $x^{1/5}$

e) $\ln(10x^{1/2})$

f) e^{3x}

8. Für welche der untenstehenden Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \rightarrow +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$?

(Zur Erinnerung: Es gilt $g(x) = O(f(x))$ mit $x \rightarrow +\infty$ falls $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leq A$, wobei $A \in [0, +\infty)$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.)

a) $g(x) = e^{x+4}$;

b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

Bitte wenden!

c) $g(x) = e^{x^2}$;

d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

e) $g(x) = x^x$.