Lösung - Schnellübung 4

1. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x).$$

a) Zeigen Sie $f''(x) - 4f(x) = 0$.

b) Zeigen Sie $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

c) Zeigen Sie $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x) \\ f'(x) &= 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2) \\ f''(x) &= 4\sinh(2x) - 4(\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)\sinh(x)). \end{aligned}$$

Deshalb gilt, $f''(x) - 4f(x) = 0$, wie gewünscht.

b) Mit den in Teilaufgabe a) berechneten Ableitungen sieht man, dass

$$\begin{aligned} & f(x) + \frac{1}{2}f'(x) \\ &= (\sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x)) + \big(\cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2)\big) \\ &= \sinh(2x) + \cosh(2x) - (\sinh(x)^2 + 2\sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)^2) \\ &= e^{2x} - (\sinh(x) + \cosh(x))^2 = e^{2x} - e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass $f'(x) = -2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil ebenfalls gilt, $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, folgt, dass

$$f(x) = Ce^{-2x},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. (Hier haben wir den Satz auf Seite 35, Kapitel II, Teil A vom STAMMBACH verwendet). Beachte, dass $f(0) = 0$ und deshalb $0 = f(0) = Ce^0 = C$, also $C = 0$ und somit $f = 0$, was zu zeigen war.

c) Nach Teilaufgabe b) gilt $f'(x) = -2f(x)$, also insbesondere $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass

$$f'(x) = 2\cosh(2x) - 2(\sinh(x)^2 + \cosh(x)^2),$$

also folgt $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wie gewünscht.

2. Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 5}{x \ln^2(x)}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x-4)e^{x^2-4x}}{4x-8} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x^2+1}}{(\pi/4)\sec^2(\pi x/4)} = \dfrac{1}{\pi}.$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 5}{x \ln^2(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\ln^2(x) + 2\ln(x)} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln(x) + 1} \underset{\text{B-H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1/x} = +\infty.$

Es sei

$$\begin{aligned} f(x) &= nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x, \\ g(x) &= \ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Gilt auch $f(x) = o(g(x))$ oder $g(x) = o(f(x))$?

Lösung: Beachte

$$\ln(e^x - x^k) = \ln\left(e^x(1 - \frac{x^k}{e^x})\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right).$$

Deshalb gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^k)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \ln\left(1 - \frac{x^k}{e^x}\right)} = 1.$$

Wir können also folgende Rechnung durchführen

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x)} \cdots \frac{\ln(e^x)}{\ln(e^x - x^n)} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x)^n}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{\ln(e^x)^n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x}{x^n} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^n}{x^n} + \cdots + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = n \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und deshalb

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = n,$$

also $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$.

Daraus folgt auch, dass

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{n},$$

also $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Zur Frage, ob die Beziehung $g(x) = o(f(x))$ oder $f(x) = o(g(x))$ gilt: die Antwort ist in beiden Fällen nein.

Im Allgemein gilt es: wenn $g(x) = O(f(x))$, dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > 0$. Insbesondere gilt $f(x) = o(g(x))$ **nicht**. Wenn $f(x) = O(g(x))$, dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| > 0$, insbesondere gilt $g(x) = o(f(x))$ **nicht**.

Beweis: Da $g(x) = O(f(x))$ gibt es $A \in [0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \le A$. Falls $A = 0$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty > 0$. Andernfalls, haben wir

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|} \ge \frac{1}{A} > 0.$$

Analog, wegen $f(x) = O(g(x))$ gibt es $B \in [0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le B$. Falls $B = 0$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty > 0$. Andernfalls, haben wir

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|} \ge \frac{1}{B} > 0.$$