Lösung - Schnellübung 5

1. Bestimmen Sie

a) $\displaystyle\int (t-x)\,dx$;

b) $\displaystyle\int (t-x)\,dt$;

c) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int x\,(1+x^2)^9\,dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx$.

Lösung:

a) $\displaystyle\int (t-x)\,dx = tx - \frac{x^2}{2} + C.$

b) $\displaystyle\int (t-x)\,dt = \frac{t^2}{2} - xt + C.$

c) Wir nutzen $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ aus und erhalten

$$\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

d) Wir benutzen $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{10} = 20x(1+x^2)^9$ und erhalten

$$\int x\,(1+x^2)^9\,dx = \frac{1}{20}(1+x^2)^{10} + C.$$

e) Da $x = 1$ eine Nullstelle des Zählers ist, spalten wir diese zunächst ab (Polynomdivision) und erhalten

$$1-x^5 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Damit ergibt sich

$$\int \frac{1-x^5}{1-x}\,dx = \int (1+x+x^2+x^3+x^4)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(x+3)}{x+1}\,dx = \int (x+3)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C.$

2. Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ sowie die Evolute $t \mapsto \vec{z}(t)$ der kubischen Parabel $t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Wo wird die Krümmung minimal oder maximal? (Beachten Sie hierbei das Vorzeichen.)

b) Wie verhält sich $\vec{z}(t)$ in der Nähe von $t = 0$?

Lösung: Wir definieren $x(t) = t$ und $y(t) = t^3$. Die ersten und die zweiten Ableitungen dieser Funktionen sind

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 1, & \dot{y}(t) &= 3t^2, \\ \ddot{x}(t) &= 0, & \ddot{y}(t) &= 6t. \end{aligned}$$

Aus den Formeln für die Krümmung und Evolute von $\vec{r}$ folgt, dass

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{6t}{(1 + 9t^4)^{3/2}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ ist und

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{y},\, y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \dot{x} \right) \\ &= \left(t - \frac{1 + 9t^4}{6t} \cdot 3t^2,\, t^3 + \frac{1 + 9t^4}{6t} \right) \\ &= \left(\frac{t - 9t^5}{2}, \frac{1 + 15t^4}{6t} \right) \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Evolute ist an der Stelle $t = 0$ also nicht definiert. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Kurve dort einen Wendepunkt besitzt, also Krümmung Null hat.

a) Die erste Ableitung der Krümmung ist

$$k'(t) = \frac{6(1 - 45t^4)}{(1 + 9t^4)^{5/2}}.$$

Darum hat k mögliche Extrema an den Stellen $t = \pm 45^{-1/4}$. Um zu bestimmen, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Wendepunkte handelt, könnten wir die zweite Ableitung der Krümmung berechnen und das bekannte Kriterium verwenden. Hier wollen wir uns dies jedoch ersparen und beschreiten einen anderen Weg. Es gilt nämlich

$$\lim_{t \to \pm\infty} k(t) = 0, \; k(45^{-1/4}) > 0 \text{ und } k(-45^{-1/4}) < 0,$$

somit liegt an der Stelle $t = -45^{-1/4}$ (bzw. $t = 45^{-1/4}$) ein globales Minimum (bzw. ein globales Maximum) der Krümmung vor.

b) Für kleine t ist $\vec{z}(t)$ asymptotisch zu $\vec{s}(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{6t}\right)$, da die höheren Potenzen von t vernachlässigbar sind.

3. Die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ soll im Intervall $[0, 1]$ derart durch eine lineare Funktion $g(x) := x + c$ approximiert werden, dass das Integral

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$$

minimiert wird. Bestimmen Sie den Wert von c, der diese Grösse minimiert.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung: Das Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx &= \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x-c\right)^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left(x-2x^{3/2}-2cx^{1/2}+x^2+2cx+c^2\right)\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{5}x^{5/2}-\frac{4}{3}cx^{3/2}+\frac{x^3}{3}+cx^2+c^2x\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= c^2-\frac{1}{3}c+\frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Also müssen wir die Funktion $h(c)=c^2-\frac{1}{3}c+\frac{1}{30}$ minimieren. Deren Ableitung ist $h'(c)=2c-\frac{1}{3}$, und diese ist Null, wenn $c=\frac{1}{6}$. An dieser Stelle findet man tatsächlich ein Minimum der Funktion h, denn $h''=2>0$.

Insgesamt ist also $g(x)=x+\frac{1}{6}$ die beste lineare Approximation der Funktion $\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0,1]$ im *quadratischen Mittel*, und der Fehler ist $h(\frac{1}{6})=\frac{1}{180}$.

4. Es sei f eine stetige Funktion definiert auf $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$F\colon\ x\mapsto \int\limits_0^{\sin x} f(t)\,dt\,.$$

Bestimmen Sie F'.

Lösung:

Wir setzen $G(x):=\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung $G'(x)=f(x)$. Die Funktion F ist definiert durch $F(x)=G(\sin x)$. Also gilt:

$$F'(x)=G'(\sin x)\cos x=f(\sin x)\cos x.$$