Lösung - Schnellübung 6

1. Ein *Gleichdick* ist eine geometrische Figur, die in jede gleiche Richtung gleich dick ist. Oder anders gesagt: Während ein Gleichdick vorwärts gerollt wird, bleibt der höchste Punkt zu jedem Zeitpunkt auf der gleichen Höhe. Ein Beispiel dafür ist ein Kreis, aber es gibt andere Figuren, die diese Eigenschaft ebenfalls haben.

Das *Reuleaux-Dreieck* besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und drei auf die Seiten gesetzten Kreisabschnitten. Die Kreisabschnitte sind dabei so konstruiert, dass man um jeden Dreieckseckpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius der Dreiecksseite zeichnet.

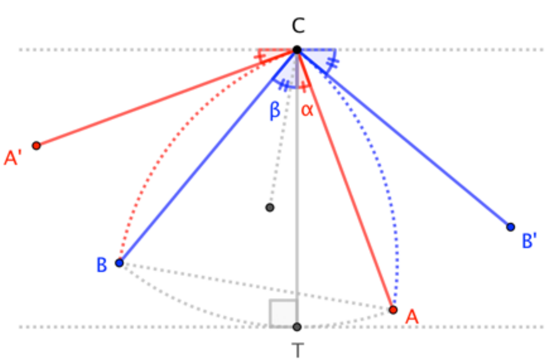
a) Beweisen Sie, dass das Reuleaux-Dreieck ein Gleichdick ist.

b) Bestimmen Sie den Umfang des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a (des inneren Dreiecks, wie oben beschrieben).

c) Bestimmen Sie die Fläche des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a.

Lösung:

a) Wir zeigen, dass, wenn das Reuleaux-Dreieck vorwärts gerollt wird, der höchste Punkt auf der Höhe a bleibt. Seien A, B, C die Ecken des Reuleaux-Dreiecks und sei T der Berührungspunkt, in dem das Reuleaux-Dreieck den Boden berührt. T liegt auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, wie in der Figur gezeigt.



Sei $\overline{A'C}$ die Tangente zum Kreisabschnitt $\overset{\frown}{BC}$ im Punkt C. Der Winkel zwischen $\overline{AC}$ und $\overline{A'C}$ muss dann ein rechter Winkel sein.

Analog, der Winkel zwischen $\overline{BC}$ und $\overline{B'C}$ muss ein rechter Winkel sein.

Man sieht sofort, dass der Winkel α zwischen der vertikalen Gerade $\overline{TC}$ und $\overline{AC}$ gleich wie der Winkel zwischen der horizontalen Gerade durch C und $\overline{A'C}$ ist.

Die Punkten auf der Seite $\overset{\frown}{BC}$ des Reuleaux-Dreiecks befinden sich unter dem Punkt C (das heisst unter der horizontalen Gerade durch C) solange $\alpha \geq 0$. Aber da T auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, ist α immer ≥ 0. ($\alpha = 0$ genau dann wenn T und A übereinstimmen, sonst ist $\alpha > 0$). Analog, die Punkten auf der Seite $\widehat{AC}$ befinden sich unter dem Punkt C solange $\beta \geq 0$. Da T auf dem Kreisbogen $\widehat{AB}$ liegt, ist β immer ≥ 0.

Daraus folgt, dass, wenn das Dreieck vorwärts gerollt wird, der Eckpunkt C immer der höchste Punkt ist. Es gilt $|TC| = a$. Somit ist der höchste Punkt immer auf der Höhe a.

b) Jede Seite des Reuleaux-Dreiecks ist ein Kreisbogen eines Kreises von Radius a mit Mittelspunktswinkel $\frac{\pi}{3}$ (das heisst $60°$). Also hat Länge $a \cdot \frac{\pi}{3}$. Der Umfang ist $3 \cdot a\frac{\pi}{3} = a\pi$.

c) Das Reuleaux-Dreieck entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck und drei Kreisabschnitten. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ und jeder Kreisabschnitt hat Flächeninhalt

$$\frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

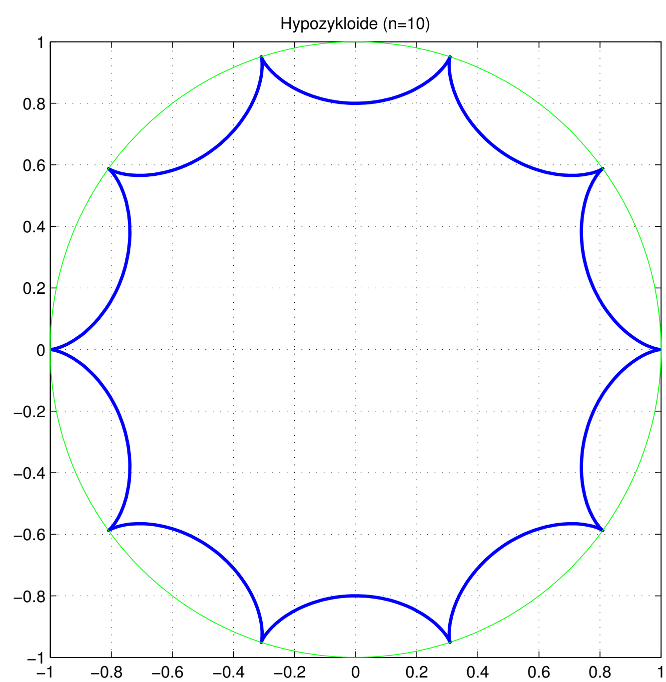
Insgesamt ergibt sich

$$\text{Fläche}_{\text{Reuleaux}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

2. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)),$$
$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.



Siehe nächstes Blatt!

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

Lösung:

a) Nach der Berechnung der Ableitungen von x und y erhält man

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) = \frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\cos^2\varphi - (n-2)\cos\varphi\cos((n-1)\varphi) - \cos^2((n-1)\varphi)\right),$$
$$\dot{x}(\varphi)y(\varphi) = -\frac{n-1}{n^2}\left((n-1)\sin^2\varphi + (n-2)\sin\varphi\sin((n-1)\varphi) - \sin^2((n-1)\varphi)\right).$$

Aus der Beziehung $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ erhalten wir für $\alpha = \varphi$ und $\beta = (n-1)\varphi$ die Gleichung

$$\cos(\varphi)\cos((n-1)\varphi) = \cos(n\varphi) + \sin(\varphi)\sin((n-1)\varphi);$$

Daraus erhalten wir

$$x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1-\cos n\varphi).$$

Die gesuchte Fläche ist somit gegeben durch die Formel für die Sektorfläche und wir erhalten

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(\varphi)\dot{y}(\varphi) - \dot{x}(\varphi)y(\varphi)\,d\varphi = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos n\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\left[\varphi - \frac{\sin n\varphi}{n}\right]_0^{2\pi} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n^2}\cdot 2\pi \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2}. \end{aligned}$$

b) Der grosse Kreis hat Fläche π; gesucht sind also die Zahlen $n = 3, 4, \ldots$, für welche das Folgende gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)\pi}{n^2} > \frac{2}{3}\pi \\ \iff\quad & 3n^2 - 9n + 6 > 2n^2 \\ \iff\quad & n(n-9) + 6 > 0 \\ \iff\quad & n = 9, 10, \ldots \end{aligned}$$

3. Es sei $h \in [0,1]$ eine reelle Zahl und T das Tetraeder mit Ecken in $(0,0,0), (1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$.

a) Berechne den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnitts von T mit der Ebene $z = h$.

b) Berechne den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze von T durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

Lösung:

a) Zwischen $h = 0$ und $h = 1$ nehmen die Seitenlängen des Schnittes parallel zur x- und y-Achse linear ab. Auf Höhe $z = h$ haben diese rechtwinklig aufeinanderstehenden Seiten also Länge $1-h$, nach der Flächenformel für Dreiecke gilt also

$$S(h) = \frac{(1-h)^2}{2}.$$

Bitte wenden!

b) Der Volumeninhalt des Tetraederstumpfes ergibt sich durch Integration in z-Richtung und ist gleich

$$V(h) = \int_0^h S(z)\,dz = \int_0^h \frac{(1-z)^2}{2}\,dz = -\frac{1}{6}\left[(1-z)^3\right]_0^h$$
$$= -\frac{1}{6}\left((1-h)^3 - 1\right) = \frac{1}{6}(1-(1-h)^3) = \frac{h^3 - 3h^2 + 3h}{6}.$$

Im Fall $h = 1$ bekommen wir den Volumeninhalt des Tetraeders:

$$V(1) = \frac{1}{6}.$$

4. Ein einfacher Steuerungsmechanismus eines Spielzeugautos besteht aus einer Zahnleiste aus Hartplastik, die die beiden Vorderräder des Autos verbindet, und einem Plastikzahnrad, das mit dem Lenkrad verbunden ist. Wird das Plastikzahnrad gedreht, wird die Zahnleiste seitwärts bewegt und die Räder des Autos drehen sich.

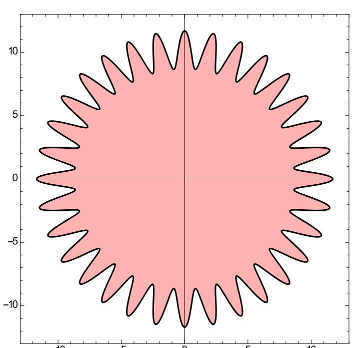
a) Die maximale Höhe der Zahnleiste (gemessen an der Spitze eines Zahns) beträgt 10mm, die minimale Höhe 7mm, die Breite 60mm und die Dicke 6mm. Die Zahnleiste beginnt und endet mit einem „Halbzahn" und besteht aus 29 Zähnen (siehe die Abbildung). Berechnen Sie das Volumen der Zahnleiste in Kubikmillimetern unter der Annahme, dass die obere Begrenzung der Zahnleiste eine Sinuskurve beschreibt.[1]

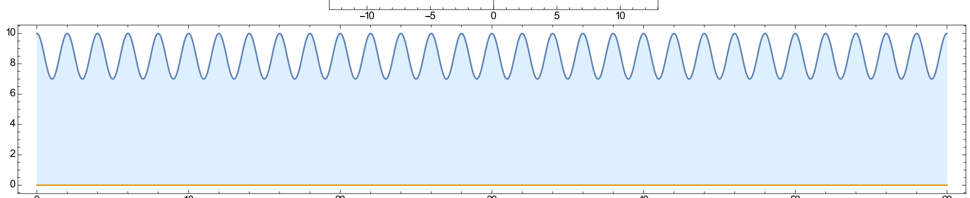
b) Das Zahnrad hat ebenso eine Dicke von 6mm und die Kurve, die die äussere Begrenzung des Zahnrads beschreibt, ist durch folgende parametrische Gleichungen gegeben:

$$x(t) = \left(\frac{3}{2}\cos(64\pi t) + \frac{32}{\pi}\right)\cos(2\pi t),$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}\cos(64\pi t) + \frac{32}{\pi}\right)\sin(2\pi t),$$

wobei $0 \leq t \leq 1$ und alle Einheiten in Millimetern gegeben sind. Berechnen Sie das Volumen des Zahnrads in Kubikmillimetern.[2] *(Hinweis: Parametrisieren Sie die Kurve in Polarkoordinaten.)*





[1] Lösung: 3060mm^3.
[2] Lösung: $\frac{6144}{\pi} + \frac{27\pi}{4} \approx 1976.9\text{mm}^3$.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:

a) Es sei f die Funktion, die die obere Begrenzung der Zahnleiste beschreibt. Wir können annehmen, dass f eine Sinusfunktion mit Maximum 10 und Minimum 7 ist. Folglich muss f der Form

$$f(x) = 1,5\sin(\omega x + \tau) + 8,5$$

für reelle Zahlen ω und $\tau \in [0, 2\pi]$ sein; ω kontrolliert die Länge einer Periode, τ die Phasenverschiebung. Da die Leiste 29 ganze und zwei halbe Zähne umfasst, durchläuft f genau 30 Perioden im Intervall $[0, 60]$. Es muss also $\omega = \pi$ gelten, wodurch eine Periode genau Länge 2 hat. Weiters muss $f(0) = 10$ gelten, also $\sin(\tau) = 1$ und demnach $\tau = \pi/2$. Da $\sin(\pi x + \pi/2) = \cos(\pi x)$ gilt, ist f insgesamt der Form

$$f(x) = \frac{3}{2}\cos(\pi x) + \frac{17}{2}$$

für $x \in [0, 60]$. Wir können die Fläche der Zahnleiste also wie folgt berechnen:

$$\int_0^{60} \left(\frac{3}{2}\cos(\pi x) + \frac{17}{2}\right) dx = \left[\frac{3\sin(\pi x)}{2\pi} + \frac{17x}{2}\right]_0^{60} = 510.$$

Die Dicke beträgt 6mm, also ist das Volumen gleich 3060mm^3.

b) In Polarkoordinaten kann die Kurve als

$$\varrho = \frac{3}{2}\cos(32\varphi) + \frac{32}{\pi}$$

angeschrieben werden, wobei $0 \le \varphi \le 2\pi$ ist. Folglich ist die Fläche gleich

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}\cos(32\varphi) + \frac{32}{\pi}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{4}\cos^2(32\varphi) + \frac{96}{\pi}\cos(32\varphi) + \frac{1024}{\pi^2}\right) d\varphi$$

$$= \frac{9}{16}\int_0^{2\pi} (\cos(64\varphi) + 1) d\varphi + \frac{48}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(32\varphi) d\varphi + \left(\frac{512}{\pi^2}\right) 2\pi$$

$$= \frac{9}{16}\int_0^{2\pi} \cos(64\varphi) d\varphi + \frac{48}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(32\varphi) d\varphi + \frac{1024}{\pi} + \frac{9\pi}{8} = \frac{1024}{\pi} + \frac{9\pi}{8},$$

da $\int_0^{2\pi} \cos(2n\varphi) d\varphi = 0$ für jede ganze Zahl n gilt. Das Volumen ist demnach gleich $\frac{6144}{\pi} + \frac{27\pi}{4} \approx 1976.9\text{mm}^3$.