

## Lösung - Serie 1

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Welche der Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z. B. ist  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und divergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und divergent.

✓ (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

✓ (d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Dies ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

2. Gegeben sei die Folge  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

✓ (a) Die Folge ist monoton wachsend.

✓ (b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist eine Nullfolge.

✓ (d) Die Folge ist konvergent.

✓ (e) Der Limes der Folge ist 1.

Für alle  $n \geq 1$  gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt  $a_{n+1} > a_n$ , d.h. die Folge ist monoton wachsend. Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Somit ist beschränkt und konvergiert gegen 1. Also sind alle Aussagen *ausser* die dritte korrekt.

**Bitte wenden!**

### 3. Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

- ✓ (a)  $\frac{1}{5}$ .
- (b) 0.
- (c)  $\infty$ .
- (d)  $\frac{1}{32}$ .
- (e)  $-\frac{1}{21}$ .

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21} \underset{\substack{= \\ \text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{10 + \frac{1}{n^2} + \frac{21}{n^3}}$$

Da die Summanden  $\frac{1}{n^3}$ ,  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{21}{n^3}$  jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ .

### 4. Die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

ist gleich ...

- (a)  $\frac{1}{2}$ .
- ✓ (b)  $\frac{2}{3}$ .
- (c) 2.
- (d)  $\frac{3}{2}$ .
- (e)  $\infty$ .

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da  $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ , konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert  $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$ .

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Welche der untenstehenden Folgen divergieren?

(a)  $a_n = \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ .

Die Folge konvergiert gegen die Eulersche Zahl  $e$ .

✓ (b)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Wird durch die harmonische Reihe minorisiert (das bedeutet die harmonische Reihe ist kleiner gleich) und ist deshalb divergent, weil die harmonische Reihe divergent ist. Die harmonische Reihe ist divergent wegen:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{n},$$

und deshalb  $a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + 1/n$ , was jeden Wert übersteigt wenn  $n$  genügend gross ist.

✓ (c)  $a_n = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n}$ .

Harmonische Reihe und deshalb divergent.

✓ (d)  $a_n = 1 + \dots + n$ .

$a_n \geq n$  und deshalb divergent.

6. Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq b$ . Vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne Taschenrechner!).

$$\text{a) } \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = -6$$

$$\text{b) } \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b.$$

$$\text{c) } \frac{a - b}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab(a - b)}{\frac{ab}{a} - \frac{ab}{b}} = \frac{ab(a - b)}{b - a} = -ab$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{3a + a^2}{a - 8} - \frac{2a - 2}{8 + a} + (64 - a^2)^{-1} \cdot (a^3 + a^2 + 42a + 31 \cdot 2^4) \\ &= \frac{(-3a - a^2)(8 + a)}{(8 - a)(8 + a)} + \frac{(2 - 2a)(8 - a)}{(8 + a)(8 - a)} + \frac{a^3 + a^2 + 42a + 8 \cdot 62}{(8 - a)(8 + a)} \\ &= \frac{-a^3 - 9a^2 - 42a + 16}{64 - a^2} + \frac{a^3 + a^2 + 42a + 8 \cdot 62}{64 - a^2} = \frac{-8a^2 + 8 \cdot 64}{64 - a^2} = 8. \end{aligned}$$

7. Gegeben sei die Funktion

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von  $f$ . Für welche Werte von  $x$  ist die Funktion  $f$  positiv? Für welche negativ? Skizzieren Sie den Graph  $\Gamma(f)$ .

Hinweis: für den Graph können Sie z.B. das Bild ausgewählter Werte im Definitionsbereich berechnen und dann die Punkte miteinander verbinden. Was passiert mit der Funktion  $f$  in Umgebungen der Nullstellen des Nenners?

*Lösung:*  $f$  ist eine rationale Funktion und lässt sich wie folgt faktorisieren

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{x(x - 2)(x + 1)}.$$

Wie jede rationale Funktion, ist  $f$  überall in  $\mathbb{R}$  ausser in den Nullstellen des Nenners definiert. Somit ist der maximale Definitionsbereich von  $f$  die Menge  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$ .

Die Nullstellen von  $f$  sind genau die Nullstellen des Zählers, nämlich  $-3$  und  $1$ .

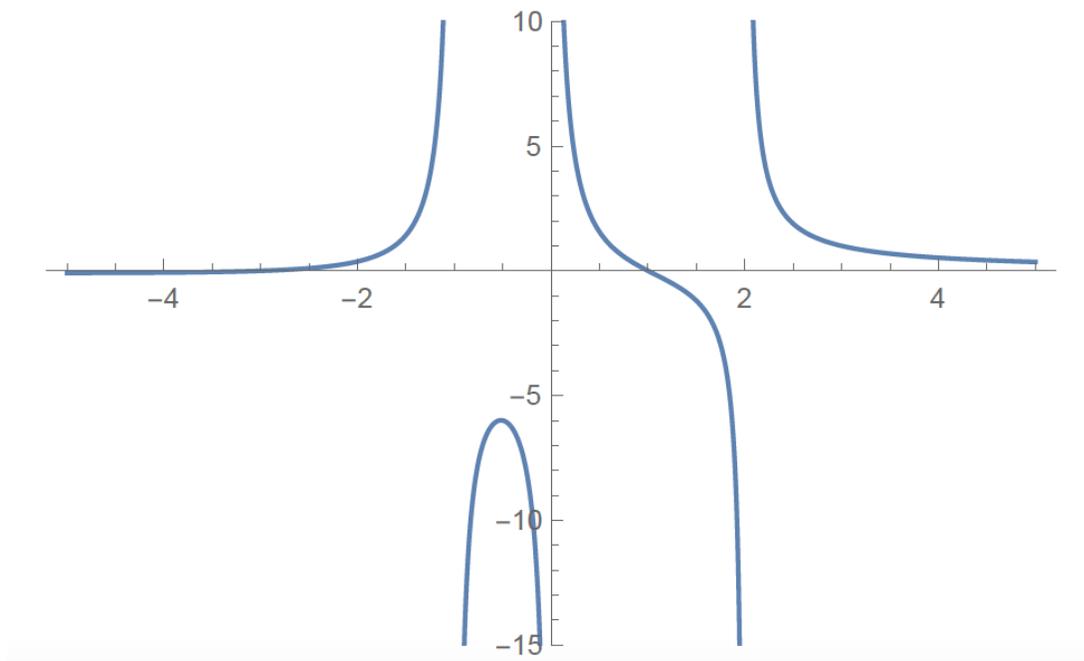
Nach Untersuchung der Vorzeichen der Faktoren im Zähler und im Nenner folgt, dass

$$\begin{aligned} P &= (-3, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty) \\ N &= (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \end{aligned}$$

wobei  $P$  die Menge, in der  $f$  positiv ist, und  $N$  die Menge, in der  $f$  negativ ist, bezeichnet.

Der Graph  $\Gamma(f)$  ist:

**Siehe nächstes Blatt!**



8. Untersuchen Sie die nachstehenden folgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert?

a)  $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$ .

Offensichtlich ist  $(a_n)$  nach unten durch  $-1$  und nach oben durch  $1$  beschränkt.

Die ersten zwei Folgenglieder sind

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

und

$$a_2 = -\frac{1}{2}$$

Da  $\cos$  bekanntlich  $2\pi$ -periodisch ist, gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+6} = a_n.$$

Deshalb kann die Folge nur konvergieren oder monoton sein, wenn sie konstant ist. Das ist sie aber nicht. Also ist sie nicht monoton und konvergiert auch nicht.

b)  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ .

Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Die Folge  $(\frac{1}{2n})_{n \geq 1}$  ist beschränkt (durch  $1$  von oben und  $0$  von unten), monoton fallend und konvergiert gegen  $0$ . Daher ist  $(a_n)_{n \geq 1}$  ebenfalls beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen  $\frac{1}{2}$ .

**Bitte wenden!**

c)  $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$ .

Es gilt

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{3 - \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 - \frac{4}{n}}$$

Da die Summanden  $\frac{5}{n^2}, \frac{2}{n^4}, \frac{4}{n}$  jeweils eine Nullfolge bilden, konvergiert die Folge  $(a_n)$  gegen  $\frac{3}{7}$ . Insbesondere ist die Folge beschränkt. Sie ist nicht monoton, da  $a_1 = 0 < \frac{3}{7} < \frac{200}{459} = a_3$ .

d)  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$  für  $n \geq 3$ .

Wir rechnen für  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (a_n - a_{n-1}) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Beachte, dass für  $n = 0: a_2 - a_1 = 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ , also es gilt

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} (a_{k+2} - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

konvergiert gegen  $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$  (geom. Reihe), also beschränkt, klar nicht monoton.

e)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

Wir rechnen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Die Folge ist offensichtlich monoton fallend, konvergiert gegen 0 und ist daher auch beschränkt.

**Siehe nächstes Blatt!**

f)  $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$ .

Wegen

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{(n+1)n} - n = (\sqrt{(n+1)n} - n) \frac{\sqrt{(n+1)n} + n}{\sqrt{(n+1)n} + n} \\ &= \frac{(n+1)n - n^2}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{n}{\sqrt{(n+1)n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \end{aligned}$$

ist die Folge monoton wachsend und konvergiert gegen  $\frac{1}{2}$ , daher ist sie auch beschränkt.

**9. Fibonacci-Folge:** Es sei die Folge  $(a_n)$  gegeben durch das rekursive Gesetz

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Grenzwert der Folge  $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , wobei  $n \geq 1$ , zu bestimmen.

a) Begründen Sie, wieso die Folge  $(a_n)$  monoton wachsend ist und wieso die Folge  $(b_n)$  beschränkt ist. *Lösung:* Weil  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  und  $a_{n-2} \geq 1$  für alle  $n \geq 2$ , folgt dass  $a_n > a_{n-1}$  und deshalb ist die Folge  $(a_n)$  monoton wachsend. Es gilt

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}} \quad (1)$$

für alle  $n \geq 2$ . Somit  $b_n \geq 1$  für alle  $n \geq 2$ , weil jedes Folgenglied von  $(b_n)$  nicht-negativ ist. Weil  $b_1 = 1$  folgt deshalb  $b_n \geq 1$  für alle  $n \geq 1$ . Eine Konsequenz davon ist, dass  $\frac{1}{b_{n-1}} \leq 1$  und deshalb folgt wegen (1), dass  $b_n \leq 2$ . Wir haben also gezeigt, dass  $1 \leq b_n \leq 2$  und die Folge  $(b_n)$  ist somit beschränkt.

b) Es sei

$$c_n = a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Zeigen Sie, dass  $c_n = -c_{n-1}$  für alle  $n \geq 4$ .

*Lösung:* Wir berechnen

$$\begin{aligned} c_n &= a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2} = (a_{n-1} + a_{n-2}) a_{n-3} - a_{n-1} (a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &= a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} \\ &= a_{n-2} a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-4} = -c_{n-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

c) Begründen Sie, dass  $c_n = (-1)^{n+1}$  gilt.

**Lösung:** Weil  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ , erhalten wir  $c_3 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$  und deshalb folgt  $c_4 = -1$ ,  $c_5 = 1$ ,  $c_6 = -1$  und so weiter.

d) Verwenden Sie jeweils Teilaufgabe c) um zu zeigen, dass die Folge  $(b_{2n})$ , wobei  $n \geq 1$ , monoton fallend ist und dass die Folge  $(b_{2n+1})$ , wobei  $n \geq 1$ , monoton wachsend ist.

*Lösung:* Weil  $c_n = (-1)^{n+1}$ , folgt  $c_{2n} = (-1)^{2n+1} = -1$  für alle  $n \geq 1$ . Also

$$a_{2n} a_{2n-3} - a_{2n-1} a_{2n-2} = -1,$$

**Bitte wenden!**

folglich  $a_{2n}a_{2n-3} - a_{2n-1}a_{2n-2} \leq 0$  und somit  $a_{2n}a_{2n-3} \leq a_{2n-1}a_{2n-2}$ , was äquivalent zu

$$b_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \leq \frac{a_{2(n-1)}}{a_{2(n-1)-1}} = b_{2(n-1)}$$

ist. Deshalb ist die Folge  $(b_{2n})$  monoton fallend. Komplet analog lässt sich zeigen, dass die Folge  $(b_{2n-1})$  monoton steigend ist.

- e)\* Begründen Sie unter Zuhilfenahme der vorangehenden Teilaufgabe, dass die Folge  $(b_n)$  gegen den goldenen Schnitt  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  konvergiert.

*Lösung:* Die Folge  $(b_{2n})$  ist wegen Teilaufgabe a) beschränkt und wegen Teilaufgabe d) monoton fallend. Folglich ist die Folge  $(b_{2n})$  konvergent. Es gilt

$$b_{2n} = 1 + \frac{1}{b_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2(n-1)}}},$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2(n-1)}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n}}}.$$

Wir setzen  $x := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{2n}$ . Wir haben also gezeigt:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Auflösen nach  $x$  gibt

$$(x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

und somit  $x + 1 - 1 - \frac{1}{x} = 1$ , was äquivalent zu

$$x - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

ist. Durch multiplizieren der obigen Gleichung mit  $x$  erhält man

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhält man  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Weil alle Folgenglieder von  $(b_{2n})$  positiv sind, folgt dass  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Wir haben also gezeigt, dass die Folge  $(b_{2n})$  gegen den goldenen Schnitt  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  konvergiert. Mit genau der gleichen Rechnung lässt sich zeigen, dass auch die Folge  $(b_{2n-1})$  gegen den goldenen Schnitt  $\varphi$  konvergiert.

Wir müssen nun noch zeigen, dass auch die Folge  $(b_n)$  gegen den goldenen Schnitt konvergiert. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Weil die Folge  $(b_{2n})$  konvergiert gibt es ein  $N_1 \geq 1$ , so dass für alle  $n \geq N_1$  folgt  $|b_{2n} - \varphi| < \varepsilon$ . Weiterhin, weil die Folge  $(b_{2n+1})$  konvergiert, gibt es ein  $N_2 \geq 1$ , so dass für alle  $n \geq N_2$  folgt  $|b_{2n-1} - \varphi| < \varepsilon$ . Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Folge  $(b_n)$  gegen den goldenen Schnitt konvergiert, wie behauptet.

**Siehe nächstes Blatt!**

