Lösung - Serie 10

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2-x+1}.$$

√ (a) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}$

Beachte

$$(x-1)^2(x+1)=x^3-x^2-x+1.$$

Man kann also den Ansatz

$$\frac{3x^2-2x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

machen. Durch Multiplikation mit $(x-1)^2(x+1)$ und Koeffizientenvergleich berechnet man $A=1, B=2, C=2$.

2. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1.$

Es gilt $\cos(x) = \frac{u^2-1}{2}$ und folglich

$$\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = \int \frac{dx}{2+\frac{u^2-1}{2}} = \int \frac{2dx}{3+u^2}.$$

Allerdings ist $du/dx = \pm\sin(x)/\sqrt{2\cos(x)+1} \neq 1$, woraus $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} \neq \int \frac{2du}{3+u^2}$ folgt.

(b) $u = 2 + \cos(x).$

Es gilt $du = -\sin(x)dx$ und folglich ist $dx = -\frac{du}{\sin(x)}$. Somit ist $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)} = -\int \frac{du}{u\sin(x)}$. Damit dieses Integral gleich $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ ist, müsste $-u\sin(x) = \frac{3+u^2}{2}$ gelten. Dies ist allerdings nicht der Fall. In der Tat ist $-u\sin(x)$ negativ für $x = \pi/4$, während $\frac{3+u^2}{2}$ immer positiv ist.

√ (c) $u = \tan(x/2).$

Es sei $u = \tan(x/2)$. Dann gilt $du = \frac{dx}{2\cos^2(x/2)}$ und somit $dx = 2\cos^2(x/2)du$. Als Nächstes drücken wir $\cos^2(x/2)$ durch Terme in u aus:

$$u = \tan(x/2) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2(x/2)}}{\cos(x/2)}.$$

Schreiben wir diese Gleichung um, so erhalten wir $\cos^2(x/2) = \frac{1}{u^2+1}$. Folglich ist also $dx = \frac{2du}{u^2+1}$ und

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du.$$

Nun müssen wir $\cos(x)$ durch Terme in u ausdrücken. Unter der Verwendung der Doppelwinkelformel für den Kosinus folgt $\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{u^2+1} - 1 = \frac{1-u^2}{u^2+1}$. Damit gilt also, wie gewünscht,

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{1}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\left(\frac{2}{u^2+1}\right)du = \int \frac{2du}{3+u^2}.$$

(d) $u = 4\tan(x).$

In diesem Fall ist $du = \frac{4dx}{\cos^2(x)}$ und folglich $dx = \frac{\cos^2(x)du}{4}$. Wie in der Lösung zu (c) gilt

$$u = 4\tan(x) = \frac{4\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\pm 4\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)}$$

und somit $\cos^2(x) = \frac{16}{u^2+16}$. Daraus folgt, dass $dx = \frac{4du}{u^2+16}$ und $\cos(x) = \pm\frac{4}{\sqrt{u^2+16}}$ gelten. Folglich ist

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx = \int \frac{1}{2\pm\frac{4}{\sqrt{u^2+16}}}\left(\frac{4}{u^2+16}\right)du = \int \frac{2du}{u^2+16\pm 2\sqrt{u^2+16}}.$$

Allerdings gilt $u^2 + 16 \pm 2\sqrt{u^2+16} \neq 3 + u^2$ (für fast alle u), woraus $\int \frac{dx}{2+\cos(x)} \neq \int \frac{2du}{3+u^3}$ folgt.

Siehe nächstes Blatt!

3. Es sei $u = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{xu}{du/dx}du = \int_0^0 \frac{xu}{du/dx}du = 0,$$

da $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\pi} = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

√ (d) Die Substitution u = sin(x) ist mit diesen Grenzen nicht erlaubt.

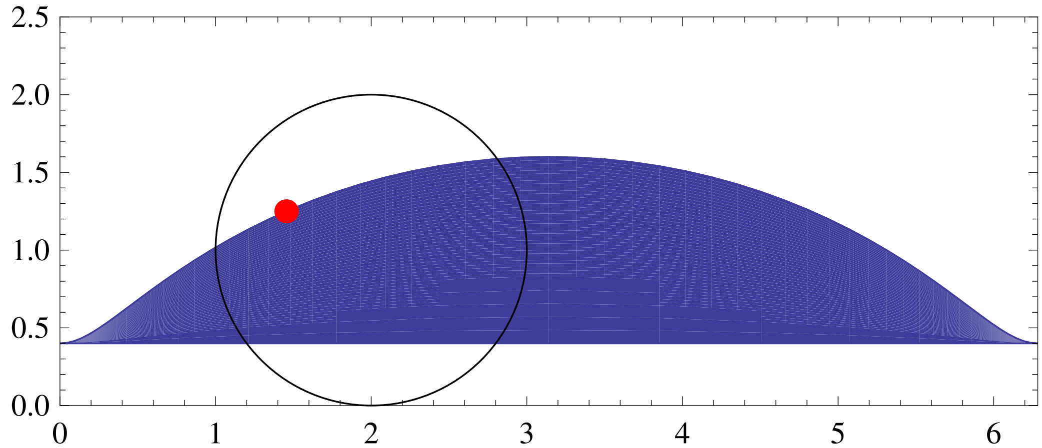
Der Beweis, der mithilfe der Substitution $u = \sin(x)$ zeigt, dass $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = 0$ gilt, ist falsch, während der andere Beweis, der mithilfe partieller Integration zeigt, dass das Integral gleich π ist, korrekt ist.

Die Substitution $u = u(x)$ kann nur dann verwendet werden, um ein endliches Integral $\int_a^b g(x)dx$ mit $a < b$ zu berechnen, wenn die Funktion u im Intervall $[a, b]$ injektiv ist. Falls u nicht injektiv ist, dann impliziert der Mittelwertsatz, dass ein $\xi \in (a, b)$ mit $u'(\xi) = 0$ existiert. Es gibt also eine Stelle im Intervall (a, b), an der $\frac{du}{dx} = 0$ ist. Somit können wir dx nicht als $dx = f(u)du$ anschreiben. Dies ist jedoch essentiell, um die Substitution durchzuführen.

4. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

√ (d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Die Zahl a ist der Radius des rollenden Rads; b ist der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt des Rads. Die Flächenformel

$$\int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)dt$$

gibt den Flächeninhalt unter der Kurve mit Parametrisierung $(x(t), y(t))$. Gesucht ist aber den Flächeninhalt der blauen Figur, also müssen wir den Flächeninhalt des Rechtecks subtrahieren. Dieses Rechteck hat Höhe $a - b$ und Breite $2\pi a$ (=Umfang des Rads). Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich

$$F = \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)(a - b\cos t)\, dt - 2\pi a(a - b)$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 - 2ab\cos t + b^2\cos^2 t)\, dt - 2\pi a(a - b)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 - 2ab\cos t + b^2 \cdot \frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt - 2\pi a(a - b)$$

$$= \left[a^2 t - 2ab\sin t + \frac{b^2}{2}(t + \frac{\sin(2t)}{2})\right]_0^{2\pi} - 2\pi a(a - b) = 2a^2\pi + b^2\pi - 2\pi a(a - b) = (b^2 + 2ab)\pi.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u^2 = e^x - 1$);*

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$ *(Hinweis: Substituieren Sie $u = x^2$);*

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx;$

d) $\displaystyle\int_3^4 x^3\cos(x^2)dx;$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1-4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx;$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx;$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx$ *(Hinweis: Das Polynom x^2+1 ist ein Faktor des Nenners.);*

h) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^2}dx.$

Lösung:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. Subst. $u^2 = e^x - 1$. Dann ist $2u\,du = e^x\,dx = (u^2+1)\,dx$.

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2u\,du}{(1+u^2)\,u} = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

b) Mit der Substitution $u = x^2$ gilt $du = 2x\,dx$, oder auch $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Daher haben wir

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{3\left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,du}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2\right) + C.$$

Im letzten Schritt haben wir dabei $u = x^2$ rücksubstituiert.

c) Einsetzen der Definition von $\cosh x$ liefert

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Nun bietet sich die Substitution $u = e^x$ an, also gilt $x = \ln u$ und damit $dx = \frac{1}{u}\,du$. Es folgt

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{2\,du}{u\,(u+u^{-1})} = \int \frac{2\,du}{u^2+1} = 2\arctan u + C$$
$$= 2\arctan(e^x) + C.$$

Bitte wenden!

Variante: Wir erweitern mit $\cosh x$ und benutzen die Identität $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2}\, dx = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\, dx.$$

Nun substituieren wir $u = \sinh x$, d. h. $du = \cosh x\, dx$. Also

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + D = \arctan(\sinh x) + D.$$

Diese beiden Stammfunktionen $2\arctan(e^x)$ und $\arctan(\sinh x)$ von $\frac{1}{\cosh x}$ unterscheiden sich tatsächlich nur um eine Konstante (um $\frac{\pi}{2}$), das ist aber nicht ganz einfach zu zeigen!

d) Es sei $t = x^2$. Dann ist $dt = 2xdx$, $t(3) = 9$ und $t(4) = 16$. Somit ist

$$\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_9^{16} t \cos(t) dt.$$

Nun verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = t$ und $v'(t) = \cos(t)$ und erhalten

$$\frac{1}{2} \left[t \sin(t)\right]_9^{16} - \frac{1}{2} \int_9^{16} \sin(t) dt = \frac{1}{2} \left(16 \sin(16) - 9 \sin(9)\right) + \frac{1}{2} \left[\cos(t)\right]_9^{16}$$

$$= \frac{1}{2} \left(16 \sin(16) - 9 \sin(9) + \cos(16) - \cos(9)\right).$$

e) Im Kapitel über die Umkehrfunktion haben wir gesehen, dass $\arcsin(\sin u) = u$ gilt für $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiter gilt $\sin u = \sqrt{1-\cos^2 u}$. Diese Beziehungen können wir offenbar mit der Substitution $2x = \cos u$ ausnutzen; also gilt $2\, dx = -\sin u\, du$. Ausserdem ist die Funktion $x(u) = \frac{1}{2}\cos u$ für $u \in [0, \pi]$ invertierbar, nämlich $u = \arccos(2x)$. Wir transformieren die Grenzen:

$$x = 0 \Rightarrow u = \arccos(0) = \tfrac{\pi}{2}, \quad x = \tfrac{1}{4} \Rightarrow u = \arccos(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\, dx &= 2\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\sqrt{1-4x^2}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin(\sin u)}{\sin u} \sin u\, du \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} u\, du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{72}\pi^2.
\end{aligned}$$

f) Durch Ausprobieren finden wir, dass 1 eine Nullstelle des Nenners ist. Mit Polynomdivision ergibt sich $(x^3 + x^2 - x - 1) : (x-1) = x^2 + 2x + 1$, was das Quadrat von $x+1$ ist. Also faktorisieren wir $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$. Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^3+x^2-x-1} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (B+2C)x + (-A-B+C)}{(x-1)(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = \frac{1}{4}$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\
&= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

g) Da x^2+1 das Nennerpolynom teilt, erhalten wir durch Polynomdivision $(x^4+2x^3+3x^2+2x+2) : (x^2+1) = (x^2+2x+2)$. Das Polynom x^2+2x+2 hat keine reellen Nullstellen, wir betrachten daher als Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \overset{!}{=} \frac{Ax+C}{x^2+1} + \frac{Bx+D}{x^2+2x+2}$$
$$= \frac{(A+B)x^3+(2A+C+D)x^2+(2A+B+2C)x+2C+D}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$, $B = C = 0$ und $D = 1$. Also

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}dx &= \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx \\
&= \ln|x^2+1| + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\
&= \ln(x^2+1) + \arctan(x+1) + C.
\end{aligned}$$

h) Zunächst gilt $x^4+2x^2 = x^2(x^2+2)$, und x^2+2 hat keine reellen Nullstellen. Wir setzen also

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2(x^2+2)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \\
&= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+2Ax+2B}{x^2(x^2+2)},
\end{aligned}$$

woraus folgt: $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$, $C = -\frac{1}{2}$ und $D = -1$. Somit

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2(x^2+2)}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+2}{x^2+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

6. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

Bitte wenden!

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

b) Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

d)* Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$.

Lösung:

a) Es gilt

$$I_0 = \int_1^e \ln(x)^0 \mathrm{d}x = \int_1^e 1 \mathrm{d}x = e - 1$$

und mittels partieller integration

$$I_1 = \int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x = \int_1^e 1 \cdot \ln(x)\mathrm{d}x = \big[x\ln(x)\big]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1.$$

b) Es sei $n \geq 2$. Wir berechnen mit partieller Integration

$$I_n = \int_1^e \ln(x)\ln(x)^{n-1}\mathrm{d}x = \big[x(\ln(x)-1)\ln(x)^{n-1}\big]_1^e - \int_1^e x(\ln(x)-1)(n-1)\ln(x)^{n-2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= 0 - (n-1)\int_1^e (\ln(x)-1)\ln(x)^{n-2}\mathrm{d}x = (n-1)\left(I_{n-2} - I_{n-1}\right).$$

Also

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_{n-1})$$

für $n \geq 2$.

c) Durch sukzessives Einsetzen erhält man

$$I_5 = -44e + 120.$$

d)* Mit dem Hinweis berechnen wir

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x \leq \int_1^{e-\varepsilon} \ln(e-\varepsilon)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(e)^n \mathrm{d}x.$$

Um die Abschätzung zu zeigen, haben wir benutzt, dass $\ln$ monoton steigend ist und deshalb $\ln(x)^n \leq \ln(e-\varepsilon)^n$ für alle $x \in [1, e-\varepsilon]$ und $\ln(x)^n \leq \ln(e)^n$ für alle $x \in [e-\varepsilon, e]$. Wir haben

Siehe nächstes Blatt!

also

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} I_n &\leq \lim_{n\to+\infty} \int\limits_1^{e-\varepsilon} \ln(e-\varepsilon)^n + \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{e-\varepsilon}^{e} \ln(e)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\varepsilon)^n \int\limits_1^{e-\varepsilon} 1\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \ln(e)^n \int\limits_{e-\varepsilon}^{e} 1\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \ln(e-\varepsilon)^n (e-\varepsilon-1) + \lim_{n\to+\infty} 1^n \varepsilon = 0 \cdot (e-\varepsilon-1) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Bei der obigen Rechnung haben wir benutzt, dass $\ln(e-\varepsilon) < 1$. Wir konnten also zeigen, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \leq \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$. Und deshalb folgt, dass

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0,$$

weil wir ja $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen können (und $I_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$).

Bemerkung: (Zusammenhang zu fixpunktfreien Bijektionen, **nicht** prüfungsrelevant). Es gilt

$$I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$$

für alle $n \geq 0$, wobei die Folge a_n die Rekursionsgleichung $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ mit $a_0 = 1, a_1 = 1$ erfüllt. (Dies lässt sich Nachrechnen).

Es lässt sich zeigen, dass a_n genau der Anzahl fixpunktfreier Bijektionen auf einer n-punktigen Menge entspricht. Fixpunktfrei heisst, dass es keinen Punkt gibt der auf sich selbst abgebildet wird. Mehr dazu kann man auf `https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktfreie_Permutation` nachlesen.

Es gilt also

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\frac{a_n e}{n!} - 1\right)$$

und somit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

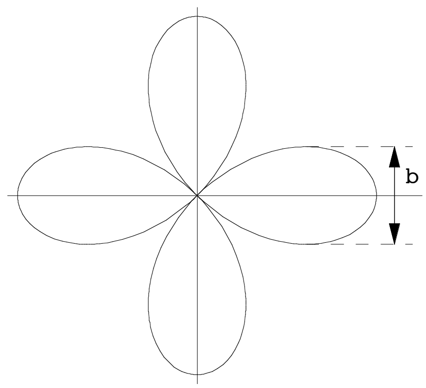
Da eine n-punktige Menge genau $n!$ verschiedene Bijektionen zulässt, haben wir gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit zufällig eine fixpunktfreie Bijektion einer n-punktigen Menge auszuwählen für grosse n ungefähr $\frac{1}{e}$ beträgt.

Bitte wenden!

7. Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

Lösung:

a) Für die Fläche erhalten wir nach der bekannten Formel

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2(2\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos(4\varphi))\,d\varphi \\ &= \frac{a^2}{4}\left[\varphi + \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Um die Breite zu bestimmen, benötigen wir die y-Koordinate desjenigen Punktes im ersten Quadranten, an dem die Tangente an der Kurve horizontal ist. Dazu bestimmen wir zunächst die kartesischen Komponenten der Kurve:

$$\begin{aligned} (x(\varphi), y(\varphi)) &= (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \\ &= (a\cos(\varphi)|\cos(2\varphi)|, a\sin\varphi|\cos(2\varphi)|)\,. \end{aligned}$$

Aus der Skizze wird klar, dass wir einen Punkt mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$ suchen. Dort ist also $\cos(2\varphi) > 0$, und wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(a\sin\varphi\cos(2\varphi)) = a\cos\varphi\cos(2\varphi) - 2a\sin\varphi\sin(2\varphi) \\ &= a\left[\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - 4\sin^2\varphi\cos\varphi\right] = a\cos\varphi\left(\cos^2\varphi - 5\sin^2\varphi\right) \\ &= a\cos\varphi\left(1 - 6\sin^2\varphi\right). \end{aligned}$$

Die einzige Lösung hiervon im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ ist

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}},$$

und die Breite ergibt sich zu

$$\begin{aligned} b &= 2y(\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0\cos(2\varphi_0) = 2a\sin\varphi_0(1 - 2\sin^2\varphi_0) = \frac{2a}{\sqrt{6}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4a}{3\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

8. Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$

Lösung:

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi}^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\varphi^2\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4}4\pi^2 = \pi^2. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1+\varphi}\right)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+\varphi}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+4\pi}. \end{aligned}$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)^2 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $\sin(\varphi)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$.