Lösung - Serie 11

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wie gross ist die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation der durch

$$y = \cos(x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

gegebenen Kurve um die x-Achse entsteht, ungefähr?

√ (a) 14.424

(b) 19.961

(c) 28.847

Lösung:

Mit Hilfe der Parametrisierung

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = \cos(x(t)) = \cos t \quad , \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

erhalten wir nach der allgemeinen Formel die Oberfläche

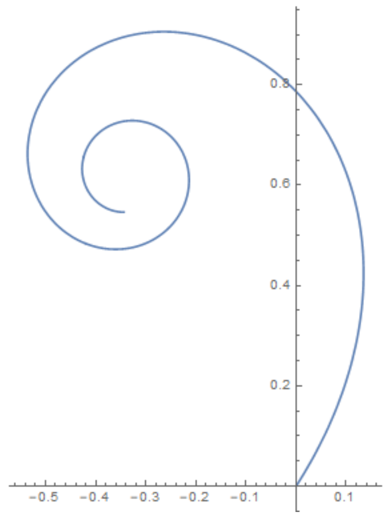
$$\begin{aligned}
O &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u^2}\, du = 2\pi \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh} u + u\sqrt{u^2+1}\right)\right]_{u=-1}^{u=1} \\
&= \pi \left[\operatorname{arsinh}(1) - \operatorname{arsinh}(-1) + \sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right)\right] = 2\pi\left(\operatorname{arsinh}(1) + \sqrt{2}\right) \\
&= 2\pi\left[\ln\left(1 + \sqrt{1^2+1}\right) + \sqrt{2}\right] = 2\pi\left[\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right] \approx 14.424.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei $u = \sin t$ substituiert.

2. Die Kurve K ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$t \mapsto (x(t),\, y(t)) = \left(\int_1^t \frac{\cos(u)}{u} \mathrm{d}u,\, \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u \right),$$

wobei $t \in [1, 4\pi)$.



Was ist die Bogenlänge von K vom Koordinatenursprung bis zum ersten Punkt mit vertikaler Tangente?

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

√ (c) $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\ln(\pi)$

Zur Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ mit $t_A \leq t \leq t_B$ ist die Bogenlänge gegeben durch

$$s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt,$$

wir müssen zunächst also t_A und t_B bestimmen. Da wir im Punkt $(0,\, 0)$ starten sollen, gilt offensichtlich $t_A = 1$.
Der Tangentialvektor $\dot{r}(t) = (\dot{x}(t),\, \dot{y}(t))$ an die Kurve K ist vertikal, wenn $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung muss also

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\cos(u)}{u} du = \frac{\cos(t)}{t} = 0$$

und

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\sin(t)}{t} \neq 0$$

Siehe nächstes Blatt!

gelten. Der erste Punkt mit vertikaler Tangente ist somit bei $t = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Bogenlänge ist also

$$s = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} dt$$

$$= \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \Big[\ln |t|\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Bitte wenden!

3. Es sei $a > 0$ eine Konstante. Was ist die Bogenlänge der *Kardioide*, gegeben in Polarkoordinaten durch $\rho(\phi) = 2a(1 + \cos\phi)$ für $\phi \in [0, 2\pi]$?

(a) $8a$

(b) $8\sqrt{2}a$

√ (c) $16a$

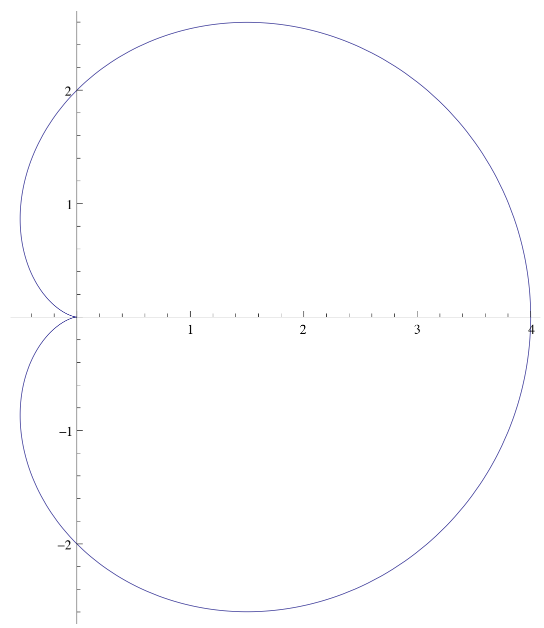
(d) $16\sqrt{2}a$

(e) $32a$

Die Bogenlänge ist

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\phi)^2 + \sin^2\phi}\, d\phi \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1+\cos\phi)}\, d\phi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\phi}{2}}\, d\phi = 4a \int_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\phi}{2}\right|\, d\phi \\ &= 8a \int_0^{\pi} |\cos u|\; du = 8a \left(\int_0^{\pi/2} \cos u\, du - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos u\, du \right) = 8a(1+1) \\ &= 16a. \end{aligned}$$

Skizze der Kardioide (mit $a = 1$):



Siehe nächstes Blatt!

4. Die Kurve K, gegeben in Parameterdarstellung durch

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = e^{-t}\left(\cos(2t), \sin(2t)\right), \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

rotiert um die x-Achse. Wie gross ist die dabei entstehende Oberfläche ungefähr?

(a) 2.317

√ (b) 3.664

(c) 84.792

Es ist

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{-t}\sin(2t)\sqrt{5}e^{-t}\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} e^{-2t}\sin(2t) dt = 2\sqrt{5}\pi \frac{e^{-2t}}{4+4}(-2\sin(2t) - 2\cos(2t))\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi(e^{-\pi} + 1) \approx 3.664, \end{aligned}$$

wobei die Formel

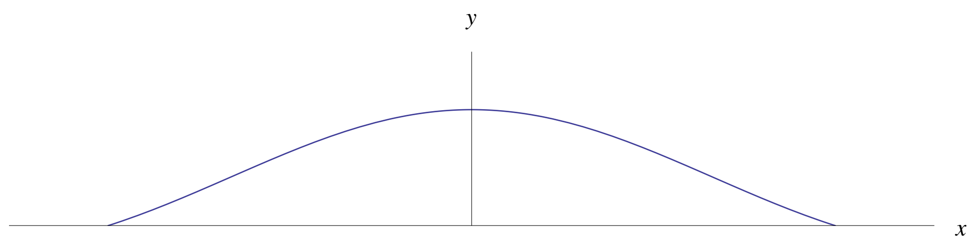
$$\int e^{ax}\sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C \quad , \quad a, b, C \in \mathbb{R}$$

benutzt wurde. Sie lässt sich mittels partieller Integration herleiten.

5. Der Graph der Funktion $f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x=0;\\ \frac{\sin x}{x} & \text{sonst}\end{cases}$$

wird um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?



(a) $\frac{2}{3}\pi^3$

(b) π^2

(c) 3π

√ (d) 4π

Wir zerlegen den Körper in dünne Hohlzylinder mit Innenradius x und Aussenradius $x+dx$. Ein solcher Hohlzylinder hat den Umfang $2\pi x$, die Höhe $\frac{\sin x}{x}$ und die Dicke dx, also das Volumen

$$dV=2\pi x\frac{\sin x}{x}\,dx=2\pi\sin x\,dx.$$

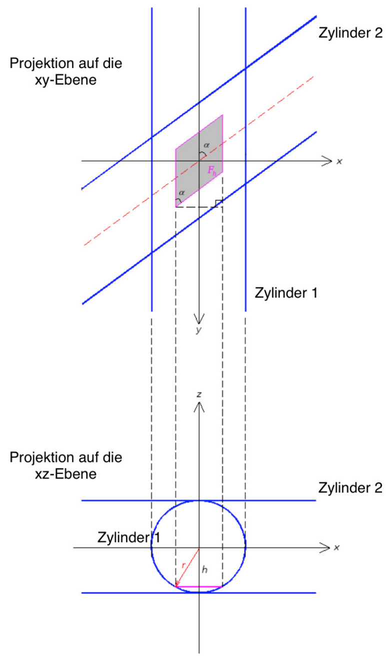
Das Gesamtvolumen ist somit

$$V=\int_0^\pi dV=2\pi\int_0^\pi\sin x\,dx=4\pi.$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Zwei gerade Kreiszylinder Z_1 und Z_2 mit gleichem Grundkreisradius r durchdringen einander derart, dass sich ihre Achsen schneiden und den Winkel α einschliessen. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $Z_1 \cap Z_2$.

Hinweis: Zerschneiden Sie den Körper durch Ebenen, welche zu beiden Achsen parallel sind.



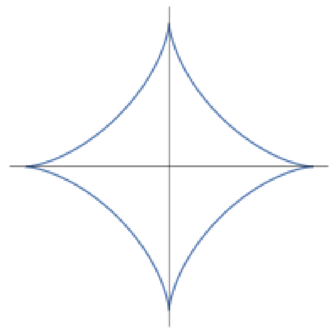
Lösung: Wir legen ein Koordinatensystem so, dass die Zylinderachsen in der xy-Ebene liegen, wobei eine von denen mit der y-Achse übereinstimmt. Aus dem folgenden Bild lässt sich herleiten, dass der Durchschnitt von $Z_1 \cap Z_2$ mit der Ebene $z = h$ $(-r \leq h \leq r)$ ein Rhombus mit der Fläche F_h ist.

$$F_h = \frac{2\sqrt{r^2 - h^2}}{\sin\alpha} 2\sqrt{r^2 - h^2},$$

$$V = \int_{-r}^{r} \frac{4}{\sin\alpha}(r^2 - h^2)dh = \frac{4}{\sin\alpha}(2r^3 - \frac{2}{3}r^3) = \frac{16}{3\sin\alpha}r^3.$$

Bitte wenden!

7. Es sei die *Astroide* durch die folgende Parameterdarstellung gegeben:



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t, \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dabei ist $a > 0$ eine feste Zahl. Berechnen Sei in Abhängigkeit von a:

a) die Bogenlänge der Astroide;

b) die Fläche des Astroidensterns;

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

Erinnerung: (*für Teilaufgabe b)*) Es sei

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $I_2 = \frac{\pi}{4}$ und die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Es wurde auch die folgende Formel gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

Lösung:

a) die Bogenlänge der Astroide;

Für unsere Rechnungen nützen wir immer wieder die vorhandene Symmetrie aus; im ersten Quadranten läuft der Parameter t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und die gesamte Bogenlänge ist das Vierfache der Bogenlänge im ersten Quadranten, analog für die Fläche.

Siehe nächstes Blatt!

Mit $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$ und $\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t \cos t$ ergibt sich für die Bogenlänge der Astroide

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\, dt \\ &= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 12a\left[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

b) die Fläche des Astroidensterns;

Die Fläche des Astroidensterns ist

$$\begin{aligned} F &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t))\, dt \\ &= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t(1-\cos^2 t) + (1-\sin^2 t)\sin^4 t)\, dt \\ &= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t - \cos^6 t + \sin^4 t - \sin^6 t\, dt \end{aligned}$$

Wenn wir

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

schreiben, dann haben wir zusammen mit der Notation aus dem Hinweis

$$F = 6a^2(J_4 - J_6 + I_4 - I_6).$$

Wir widmen uns nun dem Hinweis und zeigen, dass $I_n = J_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &\underset{du=dx}{\overset{u=x-\frac{\pi}{2}}{=}} \int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \cos^n(u) du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u) du \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du = J_n, \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt haben, dass der Kosinus eine gerade Funktion ist, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$.

Damit gilt nun

$$F = 12a^2(I_4 - I_6).$$

Verwenden wir die Rekursionsformel

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

zusammen mit dem Ergebnis $I_2 = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir

$$I_4 = \frac{3}{16}\pi, \quad I_6 = \frac{15}{96}\pi.$$

Somit ergibt sich der Flächeninhalt zu

$$F = 12a^2\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{15\pi}{96}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Bitte wenden!

c) das Volumen des Rotationskörpers, der erhalten wird, wenn die Astroide um die x-Achse gedreht wird;

Der Schnitt des Körpers mit einer Ebene parallel zur (y, z)-Ebene ist ein Kreis.
Die implizite Darstellung der Kurve ist gegeben durch

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie man aus der Parameterdarstellung ablesen kann. Um den Radius des Schnittkreises zu berechnen, bestimmen wir lokal die explizite Darstellung zu $y(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, welche für $0 \leq x \leq a$ gilt und damit die Kurve im ersten Quadranten beschreibt. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot y(x)^2$, also erhalten wir als Volumen

$$V = 2\int_0^a \pi y(x)^2 \, dx = 2\int_0^a \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$$

Nun substituieren wir $u = (\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$, wir erhalten $x = au^{\frac{3}{2}}$ und $dx = \frac{3}{2}a\sqrt{u}du$ mit den Grenzen 0 und 1. Also gilt

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi a^2 \cdot \tfrac{3}{2}a \int_0^1 (1-u)^3 \sqrt{u}\, du \\ &= 3\pi a^3 \int_0^1 (1 - 3u + 3u^2 - u^3)u^{\frac{1}{2}}\, du = 3\pi a^3 \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} - 3u^{\frac{3}{2}} + 3u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{7}{2}}\, du \\ &= 3\pi a^3 \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi a^3. \end{aligned}$$

d) die Oberfläche dieses Rotationskörpers.

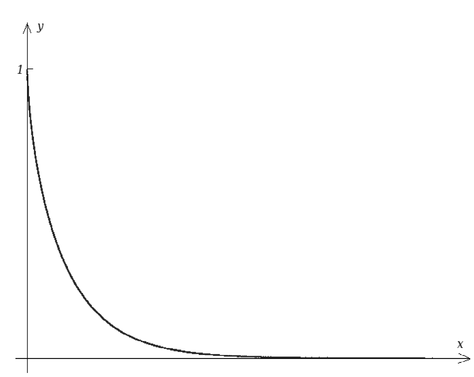
Gemäss der Formel für Oberflächenintegrale erhalten wir

$$\begin{aligned} O &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y(t)\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t \, dt \\ &= \frac{12}{5}\pi a^2 \left[\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

8. Es sei $T \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Die Kurve K in der (x, y)-Ebene sei durch die Parametrisierung

$$s \longmapsto (x(s), y(s)) = \left(\int_0^s \sqrt{1 - e^{-2u}}\,\mathrm{d}u,\, e^{-s}\right), \quad s \in [0, T],$$

gegeben.



Siehe nächstes Blatt!

a) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der durch Rotation von K um die x-Achse erzeugten Rotationsfläche in $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von T.

b) Bestimmen Sie das Volumen des von dieser Rotationsfläche und den zwei Kreisscheiben

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

bzw.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(T), y^2 + z^2 \leq e^{-T}\}$$

begrenzten Körpers, in Abhängigkeit von T.

c) Was passiert, wenn T gegen unendlich strebt?

Lösung:

a) Für die Berechnung des Oberflächeninhaltes wenden wir die Formel

$$F = 2\pi \int_0^T y(s)\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}\,\mathrm{d}s$$

an. Die Ableitungen von x und y sind:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(s) = \sqrt{1 - e^{-2s}} \quad \text{(Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)} \\ &\dot{y}(s) = -e^{-s} \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s^2)} = \sqrt{1 - e^{-2s} + e^{-2s}} = 1$. Mit diesen Daten berechnen wir jetzt den Flächeninhalt.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^T e^{-s} \cdot 1\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_0^T e^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= -2\pi\, e^{-s}\Big|_0^T = 2\pi\left(1 - e^{-T}\right). \end{aligned}$$

b) Das Volumen lässt sich durch die folgende Formel bestimmen:

$$V = \pi \int_0^T y^2 dx = \pi \int_0^T y(s)^2\,\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Also,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^T e^{-2s}\sqrt{1 - e^{-2s}}\,\mathrm{d}s = \pi \int_0^T e^{-2s}\sqrt{1 - e^{-2s}}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{1-e^{-2T}} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_0^{1-e^{-2T}} \\ &= \frac{\pi}{3}\left(1 - e^{-2T}\right)^{3/2}, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $u = 1 - e^{-2s}$ angewandt wurde.

c) Wenn T gegen unendlich strebt, strebt e^{-T} gegen 0. Demnach nähert sich die Fläche dem Wert 2π, das Volumen dem Wert $\pi/3$ an.