Lösung - Serie 3

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus $\ln$ zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2-1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

√ (e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

Die Funktion ist im Definitionsbereich $[0,\infty)$ streng monoton wachsend, also injektiv. Des Weiteren ist sie surjektiv, also umkehrbar. Sei $y = \ln(x^2+1)$. Lösen wir nach x auf, so erhalten wir $x = \sqrt{e^y - 1}$. Vertauschen von x und y führt schließlich zu $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ist injektiv.

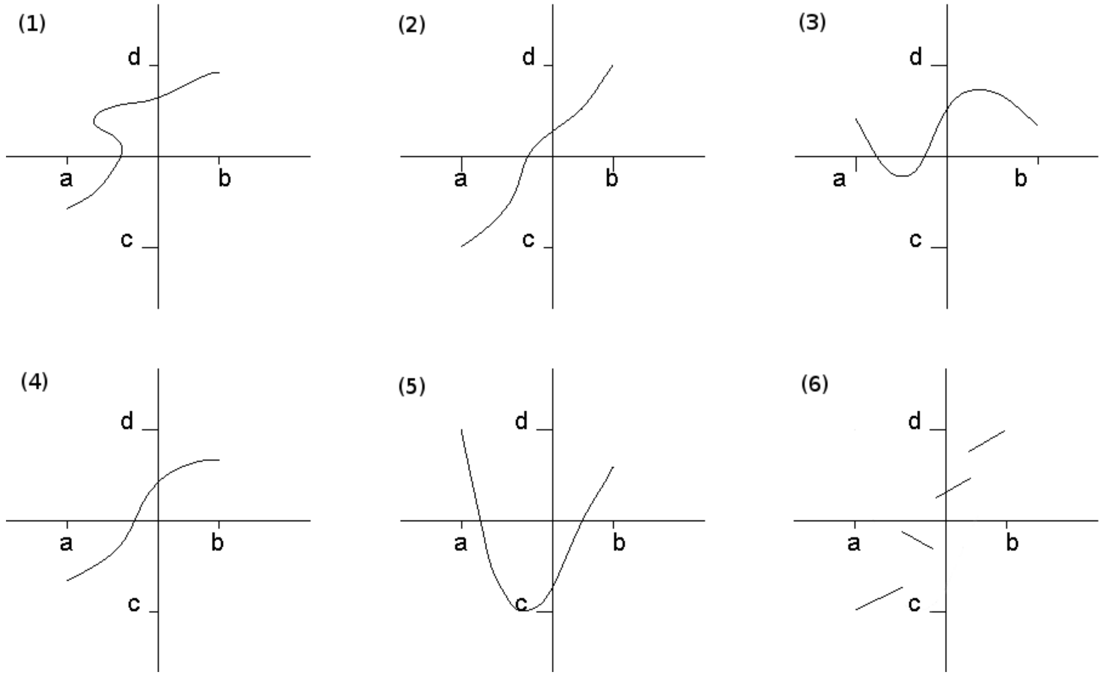
(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

√ (c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0,1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos(\sqrt{\arccos x}^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ unter f gleich $[0, 1/\sqrt{2}]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

√ (b) (2)

(c) (3)

√ (d) (4)

(e) (5)

√ (f) (6)

(1) ist kein Graph einer Funktion, weil verschiedene y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate möglich sind. In (3) und (5) sind verschiedene x-Koordinaten mit derselben y-Koordinate möglich; in diesen Fällen ist die Funktion also nicht injektiv. Für (2), (4) und (6) tritt dieses Problem nicht auf; deshalb sind sie Graphen zweier injektiver Funktionen auf einem geeigneten Definitionsintervall.

Siehe nächstes Blatt!

4. Eine Funktion g heisst *Asymptote* einer Funktion f für $x \to \infty$, falls $\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ gilt. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

$\checkmark$ (c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

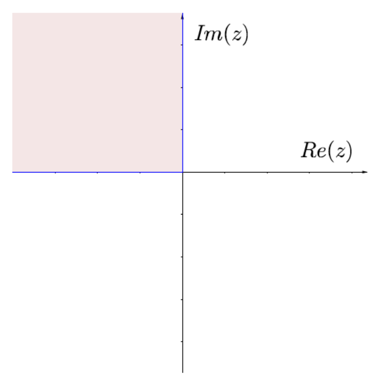
(e) $g(x) = e^{-x}$

Es gilt

$$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x+1} = e^x - 1 + 2/(e^x+1).$$

Terme, die hier für $x \to \infty$ nicht gegen Null konvergieren, sind Terme, die in der Funktion g vorkommen. Also $g(x) = e^x - 1$.

5. Betrachten Sie das Gebiet definiert durch den roten Teil des Bildes (ohne die blaue Linien)



Welche Menge wird von diesem Gebiet dargestellt?

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}$

√ (d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}$

6. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto 2x-6 \\ f_2\colon \mathbb{R} \to [0,\infty), & x \mapsto |x| \\ f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \min\{x^2-9, 0\} \\ f_4\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{array}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0,\infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \to \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

Lösung:

a) In der Vorlesung wurde für eine Funktion f Injektivität definiert als

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

das ist logisch äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- f_1 ist bijektiv:

$$2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \qquad f_1 \text{ ist injektiv}$$

$$y \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wähle } x = \frac{y+6}{2} \;\Rightarrow\; f_1(x) = y \qquad f_1 \text{ ist surjektiv}$$

- f_2 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ ist } f_2(x_1) = f_2(x_2) \qquad f_2 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$y \in [0,\infty) \text{ beliebig, wähle z.B. } x = -y \;\Rightarrow\; f_2(x) = y \qquad f_2 \text{ ist surjektiv}$$

- f_3 ist nicht bijektiv:

$$\text{(z.B.) für } x_1 = -5, x_2 = 8 \text{ ist } f_3(x_1) = f_3(x_2) \qquad f_3 \text{ ist nicht injektiv}$$

$$\text{(z.B.) für } y = 2 \text{ gibt es kein } x \in \mathbb{R}, \text{ so dass } f_3(x) = y \qquad f_3 \text{ ist nicht surjektiv}$$

- Wir beginnen, indem wir $f_4(x)$ umformen:

$$f_4(x) = \frac{x+1}{2x-6} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{(x-3)+4}{x-3} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{x-3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}.$$

  Damit erkennt man leichter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{x_1-3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x_2-3} \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{x_1-3} = \frac{2}{x_2-3} \\ &\Rightarrow \quad x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad f_4 \text{ ist injektiv} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{x-3} \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \text{ so dass } \frac{1}{2} \notin W(f_4) \qquad f_4 \text{ ist nicht surjektiv}$$

  Somit ist f_4 nicht bijektiv.

Bitte wenden!

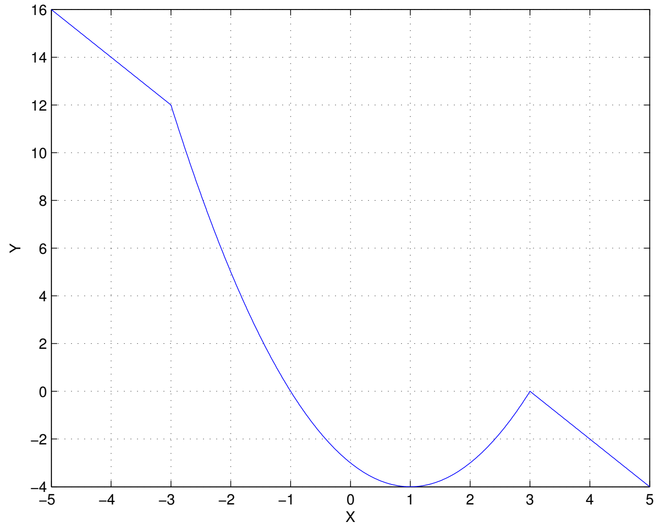


Abbildung 1: Aufgabe 4. b) Funktion g

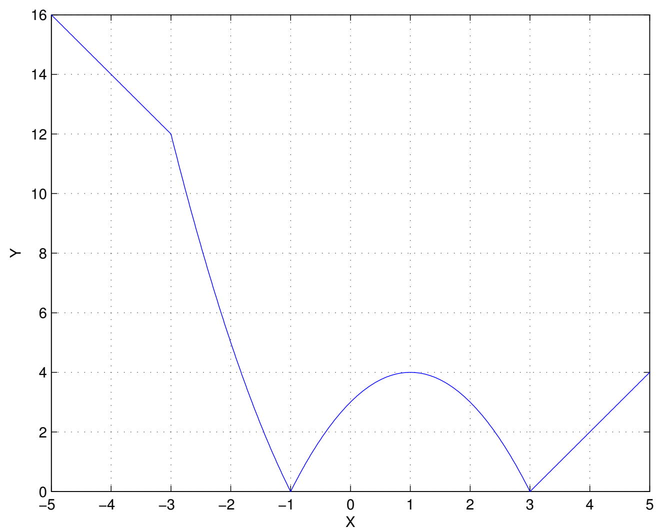


Abbildung 2: Aufgabe 4. b) Funktion h

b) Siehe Abbildungen 1 und 2.

Bemerkung: Da f_2 die Betragsfunktion ist, erhält man den Graphen von h, indem man den Teil des Graphen von g, welcher unterhalb der x-Achse liegt, an der x-Achse spiegelt.

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir müssen die Gleichung $y = f_4(x)$ nach x auflösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-6} \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 = 2xy - 6y \\ &\Leftrightarrow \quad 6y+1 = 2xy - x \\ &\Leftrightarrow \quad 6y+1 = x(2y-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen wir noch die Variablen x und y und erhalten:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x-1}.$$

7. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f_i je ein möglichst grosses Intervall I, so dass $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist und $-3\pi \in I$. Was ist das Bild von I unter f_i?

a) $f_1(x) = x^4 + x^2$

b) $f_2(x) = e^x - 5$

c) $f_3(x) = \tan(x)$

Lösung:

a) f_1 ist gerade und somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Also gilt $I \subset (-\infty, 0]$ oder $I \subset [0, \infty)$. Die Bedingung $-3\pi \in I$ ergibt $I \subset (-\infty, 0]$. Ausserdem ist f_1 strikt monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und deshalb dort injektiv. Daraus folgt, dass $I = (-\infty, 0]$.

Wir bestimmen das Bild von I unter f_1. Es gilt $f_1(0) = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \infty$. Da f_1 stetig ist, folgt $f_1(I) = [0, \infty)$.

b) Die Exponentialfunktion e^x ist überall injektiv. Die Funktion $e^x - 5$ ist eine Translation nach unten von e^x und deshalb auch auf ganz $\mathbb{R}$ injektiv.

Das Bild der Exponentialfunktion ist $(0, \infty)$. Also gilt $f_2(I) = (-5, \infty)$.

c) Bekanntlich ist $\tan(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert und injektiv auf jedem Intervall der Form $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Da $-3\pi \in I$ gelten muss, haben wir $I = \left(-3\pi - \frac{\pi}{2}, -3\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ausserdem haben wir $\tan(I) = \mathbb{R}$.

8. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.
Lösung:

a) Da
$$\frac{t}{t+\sqrt{t}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{t}+1} \to 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 1$.

b) Da
$$\sqrt{4t^2+3} - 2t = \frac{3}{\sqrt{4t^2+3}+2t} \to 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 2t$.

c) Da $\cos(1/t) \to \cos(0) = 1$ für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto 3t+1$.

d) Da
$$\log(1+e^t) - t = \log(1+e^t) - \log(e^t) = \log(1+e^{-t}) \to \log(1) = 0$$
für $t \to \infty$, ist die Asymptote die Gerade $t \mapsto t$.

9. Berechnen Sie jeweils die Summe $z + w$, das Produkt $z \cdot w$ und den Quotienten z/w in kartesischer Form.

a) $z = 1 + i$, $w = i$

b) $z = -4 - 16i$, $w = -5 - 10i$

Zeichnen Sie in der komplexen Ebene folgende Mengen.

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > |z|^2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$

Lösung:

a) Es gilt:
$$z + w = (1+i) + i = (1+0) + (1+1)i = 1 + 2i,$$
$$z \cdot w = (1+i) \cdot i = i + i^2 = -1 + i,$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(1+i)(-i)}{1} = -i - i^2 = 1 - i.$$

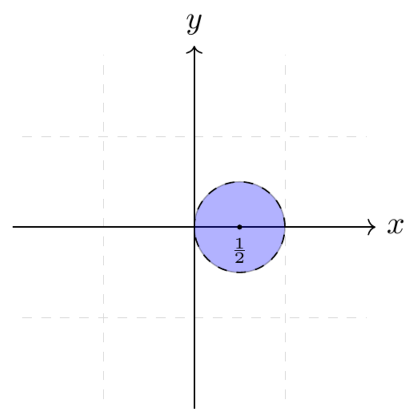
b) Es gilt:
$$z + w = (-4-16i) + (-5-10i) = -9 - 26i,$$
$$z \cdot w = (-4-16i) \cdot (-5-10i) = 20 + 40i + 80i + 160i^2 = -140 + 120i,$$
$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{(-4-16i)\cdot(-5+10i)}{125} = \frac{20 - 40i + 80i - 160i^2}{125} = \frac{180+40i}{125} = \frac{36}{25} + \frac{8}{25}i.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Wir schreiben $z = x + iy$. Die Gleichung $\mathrm{Re}(z) > |z|^2$ bekommt:

$$\begin{aligned} x > x^2 + y^2 \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 - x + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} > \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2. \end{aligned}$$

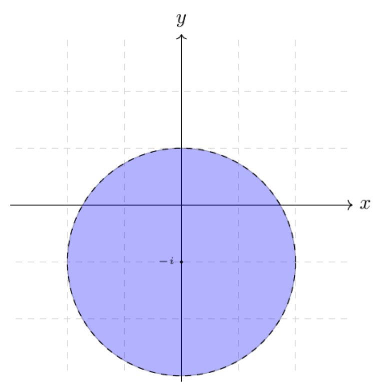
Diese Ungleichung beschreibt eine Scheibe (ohne Rand) von Radius $\frac{1}{2}$ um Punkt $(\frac{1}{2}, 0)$.



d) Wir schreiben $z = x + iy$. Die Ungleichung $|z + i| < 2$ bekommt:

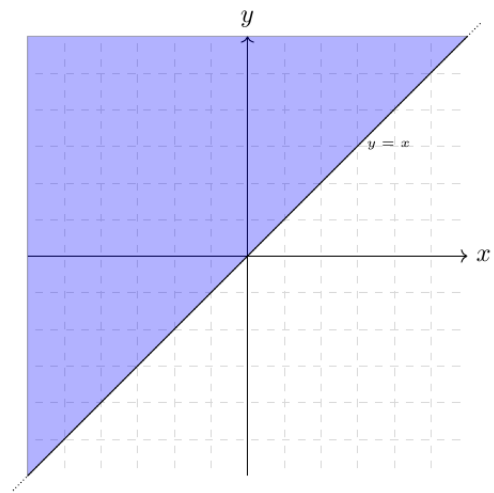
$$x^2 + (y + 1)^2 < 4,$$

welche eine Scheibe (ohne Rand) von Radius 2 um Punkt $(0, -1)$ beschreibt.



e) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$ beschreibt das Gebiet

Bitte wenden!



Beachte, dass die Gerade $y = x$ nicht enthalten ist.