Lösung - Serie 4

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right)\cdot(5\sqrt{3}+b\cdot i)$. Für welches $b\in\mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

√ (e) Keines von diesen.

Es gilt

$$\begin{aligned} z &= 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right)\cdot(5\sqrt{3}+b\cdot i) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot(5\sqrt{3}+bi) \\ &= 15+b\sqrt{3}i+5\sqrt{3}\mathbf{i}-b = (15-b)+i\cdot(b\sqrt{3}+5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet, und dies ist für $b=-5$ der Fall, welches nicht auftaucht.

2. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2}-\sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2}-\sqrt{2})$.

√ (c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

Um uns die Arbeit zu erleichtern, verwenden wir, dass $z^6 = (z^2)^3$. Wir berechnen zuerst z^2 mit Hilfe der binomischen Formel,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= 2+\sqrt{2}+2i\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

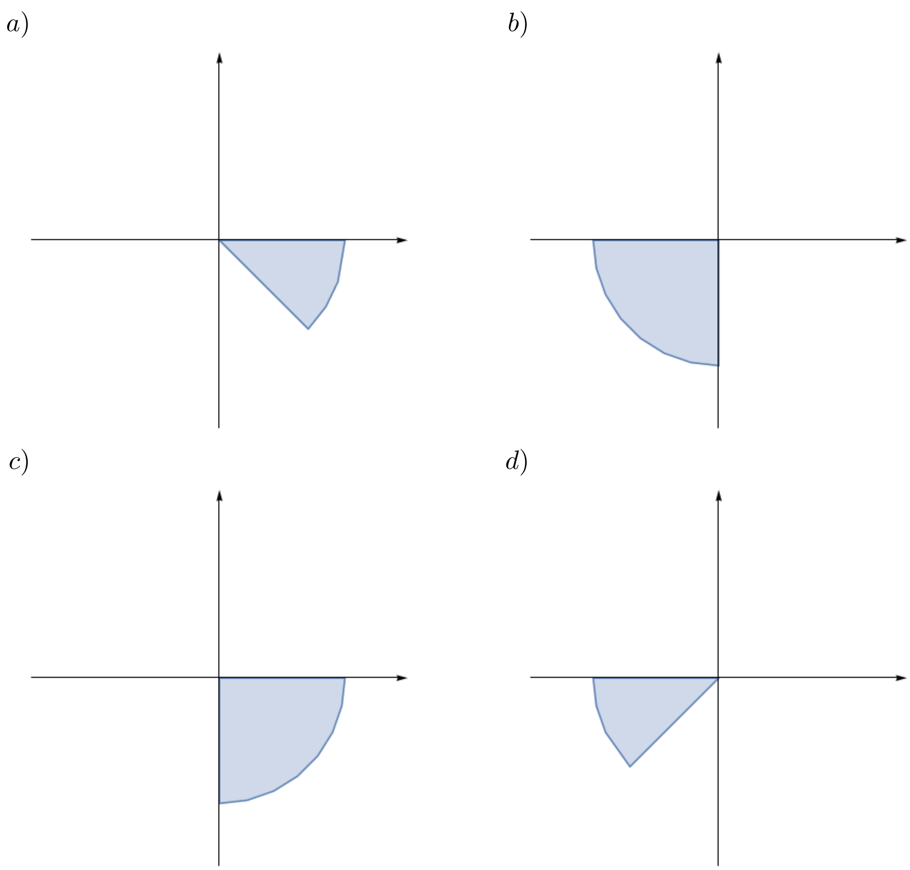
Wegen $|z^2| = \sqrt{8+8} = 4$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ erhalten wir mit Hilfe der Eulerschen Identität die Polarformdarstellung

$$z^2 = 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\exp(i\tfrac{\pi}{4}).$$

Daraus folgt schliesslich

$$z^6 = (z^2)^3 = \left(4\exp(i\tfrac{\pi}{4})\right)^3 = 64\exp(i\tfrac{3}{4}\pi).$$

3. Es sei
$$A := \left\{ re^{i\varphi} : r \in [0,1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \right\} \subset \mathbb{C}$$
und es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?



(a) a)

√ (b) b)

(c) c)

(d) d)

Es gilt
$$f(re^{i\varphi}) = re^{i\varphi}re^{i\varphi} = r^2 e^{i2\varphi}.$$
Beachte $f([0,1]) = [0,1]$, d.h. die Funktion $x \mapsto x^2$ ist surjektiv auf $[0,1]$. Weil $2[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] = [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ ist Antwort b) richtig.

Bitte wenden!

4. Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

Falsch. Der Betrag von $(1+i)^{2000}$ muss $\sqrt{2}^{2000}$ und damit viel grösser als $\sqrt{2}$ sein.

(b) -2^{1000}

Falsch. Aber 2^{1000} wäre richtig gewesen. Es gilt $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi i}{4}}$ und folglich $(1+i)^{2000} = \sqrt{2}^{2000}(e^{\frac{\pi i}{4}})^{2000} = 2^{1000}e^{500\pi i} = 2^{1000}(e^{2\pi i})^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$.

√ (c) $(2i)^{1000}$

Richtig. Es gilt $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ und deshalb

$$(1+i)^{2000} = ((1+i)^2)^{\frac{2000}{2}} = (2i)^{1000}.$$

Beachte, dass zudem

$$(2i)^{1000} = 2^{1000}i^{1000} = 2^{1000}(i^4)^{250} = 2^{1000}1^{250} = 2^{1000}$$

gilt.

(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

Falsch. Das Argument von $(1+i)^{2000}$ muss bis auf ein Vielfaches von 2π mit $2000 \cdot \frac{\pi}{4}$ übereinstimmen.

(e) 2^{2000}

Falsch. Der Betrag ist zu gross.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.

Lösung

a) Es gilt $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Für z_2 merken wir, dass $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Also gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

Somit gilt es $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2$ und $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Wir bestimmen zuerst alle Zahlen $z = re^{i\varphi}$, die die Bedingung i) erfüllen. Sei $w = z^2$, $w = se^{i\theta}$ mit $\theta \in (-\pi, \pi]$. Dann ist z eine quadratische Wurzel von w und somit gilt $z = \sqrt{s}e^{i\frac{\theta}{2}}$ oder $z = \sqrt{s}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$, das heisst, $\varphi = \frac{\theta}{2}$ oder $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi$.

Es gilt:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \text{deshalb} \quad \arg\left((1+i)^2\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Zahl -7 befindet sich auf der negativen reellen Achse und somit gilt $\arg(-7) = \pi$.

Also folgt aus Bedingung i): $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$. Und so:

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi = \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{5\pi}{4} \leq \varphi = \frac{\theta}{2} + \pi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Bedingung i) wird somit von allen Zahlen $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ erfüllt.

Nun betrachten wir Bedingung ii).

Es gilt:

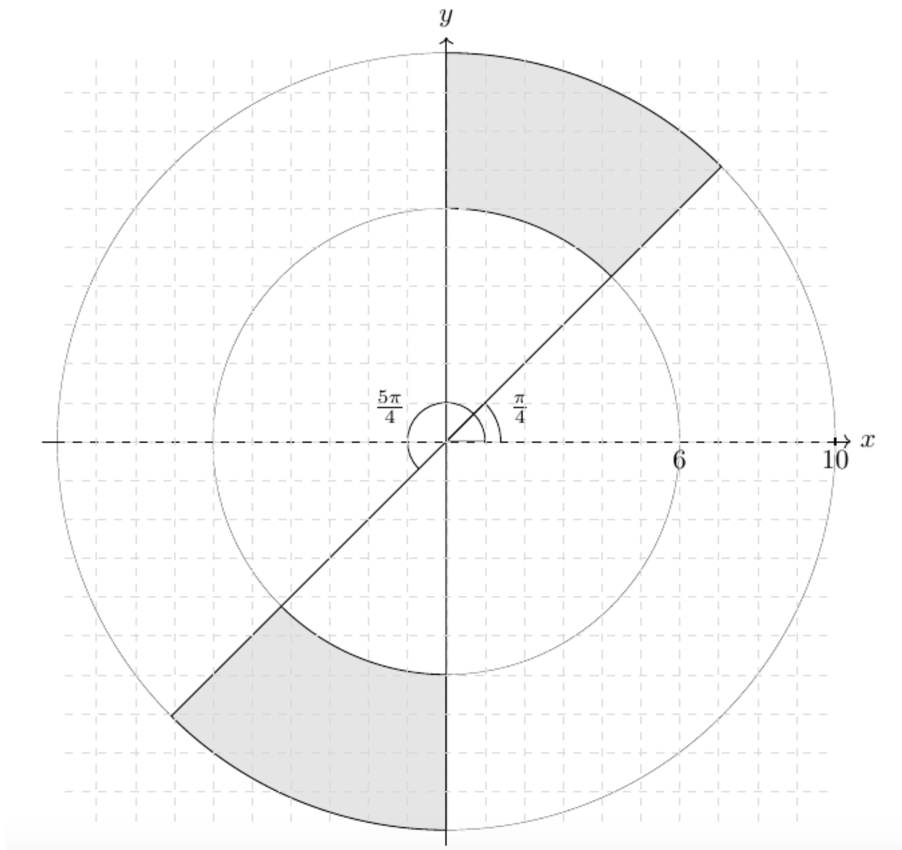
- $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
- $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}}\right| = \frac{|1+2\sqrt{2}i|}{|e^{i\pi}|} = \frac{\sqrt{1+8}}{1} = 3$.
- $\left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| = \frac{|z|}{|2i|} = \frac{|z|}{2}$.

Somit muss es gelten

$$3 \leq \frac{|z|}{2} \leq 5 \quad \text{, das heisst,} \quad 6 \leq |z| \leq 10.$$

Der Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche die Bedingungen i) und ii) gelten ist:

Bitte wenden!



6. **a)** Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w + z| < C$.

b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2} e^{-i \frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $|w| < 1$. Dann gilt

$$|z + w| \leq |z| + |w| < 1 + 1 = 2.$$

Wir möchten nun zeigen, dass für $0 < D < 2$ existieren es $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ und $|z + w| = D$.

Nämlich, betrachte $z = w = \frac{D}{2}$. Dann

$$|z| = |w| = \frac{D}{2} < \frac{2}{2} = 1$$

und

$$|z + w| = 2\frac{D}{2} = D.$$

Dies zeigt, dass $C = 2$ die kleinste solche Zahl ist.

Siehe nächstes Blatt!

b) Da z_1 und z_2 Lösungen der Gleichung $z^n = c$ sind, gilt es $z_1^n = c = z_2^n$, das heisst

$$\sqrt{2}^n e^{i\frac{5\pi}{16}n} = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{15\pi}{16}n}.$$

Das impliziert:

$$\begin{aligned}
& \frac{5\pi}{16}n = -\frac{15}{16}\pi n + k2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z} \\
\iff \quad & \pi\left(\frac{5n}{16} + \frac{15n}{16} - 2k\right) = 0 \\
\iff \quad & \frac{20n}{16} - 2k = 0 \\
\iff \quad & k = \frac{5}{8}n.
\end{aligned}$$

Da k ganzzahlig sein muss, folgt es $n \geq 8$.

Für $n = 8$ erhalten wir

$$c = (\sqrt{2})^8 e^{i\frac{5\pi}{16}8} = 16e^{i\frac{5\pi}{2}} = 16i.$$

7. Zeigen Sie die folgende trigonometrische Beziehungen:

a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$.

b) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$.

Wir lösen Teilaufgaben **a)** und **b)** gleichzeitig.

Aus der Eulerschen Formel haben wir $e^{i3x} = \cos(3x) + i\sin(3x)$. Ausserdem gilt es mit den Eigenschaften der Exponentialfunktion: $e^{i3x} = (e^{ix})^3$. Also:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) + i\sin(3x) &= e^{i3x} = (e^{ix})^3 \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\
&= \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\big(\cos(x) + i\sin(x)\big)^2 \\
&= \big(\cos(x) + i\sin(x)\big)\big(\cos(x)^2 + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin(x)^2\big) \\
&= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) + i\big(3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)\big).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir die gewünschte Beziehungen.

Anderer Lösungsweg:

Wir berechnen zuerst $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$.

Aus der Eulerschen Formel und aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion folgt

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) + i2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x).$$

Durch Vergleichen von Imaginär- und Reellteil erhalten wir

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}
$$

Ähnlicherweise haben wir

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) + i\sin(3x) &= e^{i3x} = e^{i(2x+x)} = e^{i2x}e^{ix} \\
&= (\cos(2x) + i\sin(2x))\,(\cos(x) + i\sin(x)) \\
&= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) + i\left(3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)\right).
\end{aligned}
$$

Dies impliziert

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) \\
\sin(3x) &= 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x).
\end{aligned}
$$