Lösung - Serie 5

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist stetig $\Longleftrightarrow$ f ist differenzierbar.

(b) f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

$\surd$ (c) f ist stetig $\Longleftarrow$ f ist differenzierbar.

(d) Es gibt keinen derartigen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Aber nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, zum Beispiel $x \mapsto |x|$ bei $x = 0$.

2. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x = 6$?

(a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

$\surd$ (b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

(c) $y = \frac{1}{2}x - 1$.

(d) $y = x - 4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

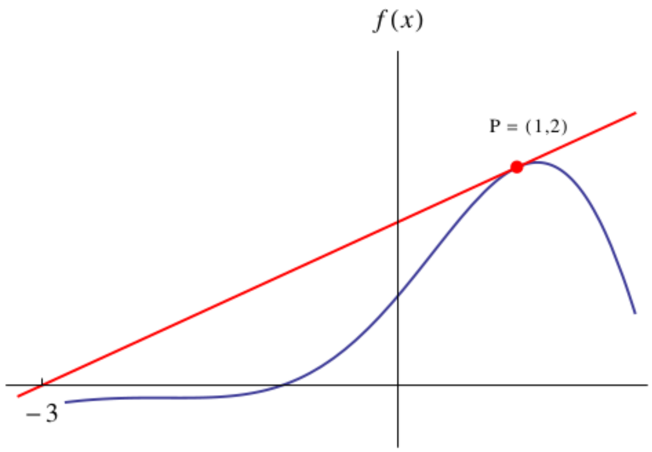
Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y = ax+b$ gegeben, wobei $a = f'(6)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(6, f(6))$ enthält. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

und damit $a = f'(6) = \frac{1}{4}$. Aus $(6, f(6)) = (6, 2)$ folgt, dass b die Gleichung $2 = \frac{6}{4} + b$ erfüllt, dass also $b = \frac{1}{2}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

Bitte wenden!

3. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

Falsch.

√ (b) $\frac{1}{2}$

Richtig! Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(c) $-\frac{2}{3}$

Falsch.

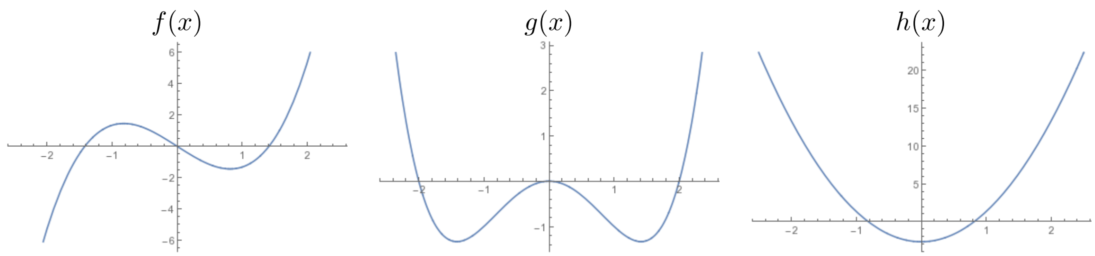
(d) -2

Falsch.

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Falsch.

4. Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f' = g$

Falsch. Wenn $f' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von f in 0 verschwinden, da g dort eine Nullstelle hat. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

√ (b) $g' = f$

Richtig! f hat drei Nullstellen $x_0 < x_1 < x_2$ und an diesen veschwindet offenbar die Ableitung von g. Ausserdem ist g auf $(-\infty, x_0)$ monoton fallend, auf (x_0, x_1) monoton steigend, auf (x_1, x_2) monoton fallend und auf (x_2, ∞) monoton steigend. Auch das passt zu dem Verhalten von f, welche negativ auf $(-\infty, x_0)$ ist, positiv auf (x_0, x_1) ist, negativ auf (x_1, x_2) ist und positiv auf (x_2, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

√ (c) $f' = h$

Richtig! h hat zwei Nullstellen $x_0 < x_1$ und an diesen verschwindet offenbar die Ableitung von f. Ausserdem ist f monoton steigend auf $(-\infty, x_0)$, monoton fallend auf (x_0, x_1) und monoton steigend auf (x_1, ∞). Auch das passt zum Verhalten von h, welche positiv auf $(-\infty, x_0)$ ist, negativ auf (x_0, x_1) ist und postiv auf (x_1, ∞) ist. All das sind Indizien dafür, dass die Aussage korrekt ist.

(d) $h' = g$

Falsch. Wenn $h' = g$ gelten würde, dann müsste die Ableitung von h in 2 verschwinden, da g dort eine Nullstelle besitzt. Man sieht jedoch, dass dies nicht der Falls ist.

√ (e) $g'' = h$

Richtig! Das folgt aus $g' = f$ und $f' = h$.

(f) $f'' = g$

Falsch. Wenn $f'' = g$ wäre, dann müsste g für alle $x < 0$ negativ sein; stellt man sich nämlich vor, man würde auf dem Graphen von f mit dem Auto entlang fahren, dann lenkt man bis zum Punkt $(0, 0)$ nach rechts, d.h. $f''(x) < 0$ für alle $x < 0$. Jedoch ist g negativ auf dem Intervall $(-2, 0)$.

Bitte wenden!

5. Es sei das Gebiet

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) > 0 \right\}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie das Gebiet B in der komplexen Ebene.

b) Das Polynom $z^3 + \frac{7}{2}z^2 + 7z + 6$ hat eine komplexe Nullstelle mit Realteil gleich -1. Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms. Wie lauten die Nullstellen in Polarform?

c) Welche dieser Nullstellen befinden sich in B?

Lösung:

a) Für $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{iz} &= \frac{x+iy+2}{i(x+iy)} = \frac{x+iy+2}{ix-y} = \frac{(-ix-y)(x+iy+2)}{(-ix-y)(ix-y)} \\ &= \frac{-ix^2+xy-2ix-xy-iy^2-2y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{-2y}{x^2+y^2} + \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2}i. \end{aligned}$$

Das Gebiet B ist damit gegeben durch

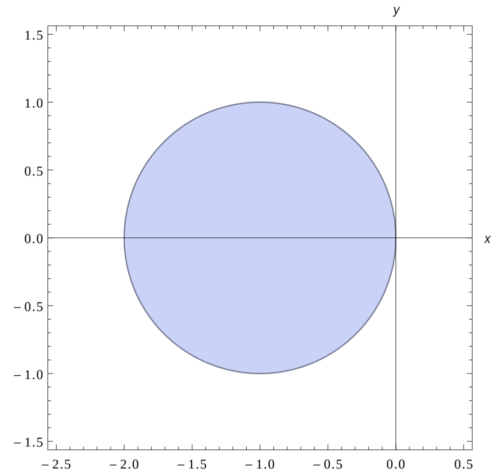
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0.$$

Umgeformt ergibt das

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{iz}\right) = \frac{-2x-x^2-y^2}{x^2+y^2} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x-x^2-y^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > x^2+2x+y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 > (x+1)^2-1+y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > (x+1)^2+y^2. \end{aligned}$$

Das Gebiet B ist also das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Radius 1. Der Rand gehört nicht zur Menge.

Siehe nächstes Blatt!



b) Wir bemerken zuerst, dass -1 keine Nullstelle des Polynoms ist und folglich die Nullstelle mit Realteil -1 nicht reell ist. Da solche Nullstellen für Polynome mit reellen Koeffizienten immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, hat das Polynom zwei Nullstellen von der Form

$$z_{1,2} = -1 \pm iy.$$

Somit müssen wir vom Polynom einen Faktor der Form

$$(z+1+iy)(z+1-iy) = z^2 + 2z + 1 + y^2$$

abspalten können. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{llllll}
(z^3 & +\frac{7}{2}z^2 & +7z & +6 &): & (z^2+2z+1+y^2) = z + \frac{3}{2} \\
-(z^3 & +2z^2 & +(1+y^2)z & &) & \\
\hline
 & \frac{3}{2}z^2 & +(6-y^2)z & +6 & & \\
-(& \frac{3}{2}z^2 & +3z & +\frac{3}{2}(1+y^2) &) & \\
\hline
 & & (3-y^2)z & +(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}y^2) & &
\end{array}$$

Es bleibt also der Rest

$$(3-y^2)z + \frac{9}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

übrig und dieser muss gleich 0 sein. Es ergibt sich also $y = \pm\sqrt{3}$ und die drei Nullstellen lauten in Normalform

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{3}{2}.$$

In Polarform lauten diese somit

$$z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{-2\pi i}{3}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{\pi i}.$$

c) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass alle Punkte $z = x + iy$ in B die Ungleichung

$$1 > (x+1)^2 + y^2$$

erfüllen müssen. Es folgt $z_1 \notin B$, $z_2 \notin B$, $z_3 \in B$.

Bitte wenden!

6. Finden Sie in der komplexen Ebene alle Lösungen der folgenden Gleichungen. Geben Sie die Lösungen jeweils auch in Polarform an.

a) $z^6 = -8$

b) $z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = 0$

c) $3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0$, wobei $z_1 = 3 + i$ eine Lösung der Gleichung sein soll und p, q reelle Koeffizienten sind, welche noch bestimmt werden müssen.

Lösung:

a) Die Gleichung lässt sich als $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$ darstellen, also sind die Lösungen in Polarform

$$z_k = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{6}\right)i}, \quad k = 0, \dots, 5;$$

also $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{6}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

In Normalform lauten die Lösungen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_1 &= i\sqrt{2},\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}},\\
z_4 &= -i\sqrt{2},\\
z_5 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

b) Wir klammern zuerst aus:

$$z^5 - 8(-1 - i\sqrt{3})z = z(z^4 - 8(-1 - i\sqrt{3})) = 0.$$

Offensichtlich ist also $z = 0$ eine Lösung. Für den anderen Faktor erhalten wir mit der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ die Gleichung

$$z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 8(-1 - i\sqrt{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Die weiteren Lösungen lauten damit in Polarform

$$z_k = 2e^{(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{4})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

In Normalform sind die Lösungen der Gleichung also

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3},\\
z_1 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i,\\
z_2 &= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3},\\
z_3 &= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i;
\end{aligned}$$

und $z_4 = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Da sämtliche Koeffizienten reell sind, muss nach einem Satz aus der Vorlesung neben z_1 auch $z_2 = \overline{z_1}$ eine Nullstelle des Polynoms sein. Damit folgt, dass $(z - z_1)(z - z_2)$ ein Faktor des Polynoms ist. Nach dem Hauptsatz der Algebra gibt es auch noch eine weitere Nullstelle z_3, welche reell sein muss (Nullstellen sind reell oder treten in komplex konjugierten Paaren auf; aber es sind in diesem Fall nur drei). Das ergibt:

$$\begin{aligned} & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3(z - (3+i))(z - (3-i))(z - z_3) \\ \iff \quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3(z^2 - 6z + 10)(z - z_3) \\ \iff \quad & 3z^3 - 12z^2 + pz + q &=& \; 3z^3 - (18 + 3z_3)z^2 + (30 + 18z_3)z - 30z_3. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir zur Bestimmung der drei Unbekannten p, q, z_3 die Gleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} 12 &=& 18 + 3z_3 & \Rightarrow & \underline{z_3 = -2} \\ p &=& 30 + 18z_3 & \Rightarrow & \underline{p = -6} \\ q &=& -30z_3 & \Rightarrow & \underline{q = 60} \end{array}$$

Zusammengefasst sind die jeweiligen Normal- und Polarformen der Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + i = \sqrt{10}e^{i \arctan(1/3)}, \\ z_2 &= 3 - i = \sqrt{10}e^{-i \arctan(1/3)}, \\ z_3 &= -2 = 2e^{i\pi}. \end{aligned}$$

7. Berechnen Sie $f' \colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

a) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \sin(x)$;

b) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$;

c) $f \colon (0, \pi) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sin x}$;

d) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$;

e) $f \colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\tan x)^2$;

f) $f \colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\ln x}$;

g) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$;

h) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

*Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion aus Teilaufgabe **h)** im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist.

Lösung:

a) $\dfrac{d}{dx}(x \sin x) = \sin x + x \cos x$ (Produktregel)

b) $\dfrac{d}{dx}\left((x^2+3)^{-1}\right) = (-1)(x^2+3)^{-2} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$ (Kettenregel)

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ (Kettenregel oder Quotientenregel)

d) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

e) $\dfrac{d}{dx}\left((\tan x)^2\right) = 2(\tan x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ (Kettenregel, Abl. von $\tan x$)

f) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ (Kettenregel und Ableitung von $\ln x$)

Bitte wenden!

g) Es sei $x \neq 0$. Es gilt $\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ (Kettenregel).

Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}},$$

weil

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = -\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0,$$

wobei wir die Substitution $x = \frac{1}{h}$ gemacht haben, gilt $f'(0) = 0$ (weil der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen).

h) Es sei $x \neq 0$. Wir berechnen

$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (Kettenregel und Produktregel).

Weiter gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Weil $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h| \cdot 1 = |h|$$

und deshalb lässt sich zeigen, dass

$$\left|\lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| = \lim_{h\to 0} \left|h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

Wir haben also gezeigt $|f'(0)| \leq 0$ und somit gilt $f'(0) = 0$. Fasst man alles zusammen erhält man:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im folgenden zeigen wir, dass die Funktion f' im Punkt $x = 0$ nicht stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht. Um dass zu zeigen muss man zwei Folgen (a_n), (b_n) finden so dass $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ mit $n \to +\infty$ und

$$\lim_{n\to +\infty} \cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim_{n\to +\infty} \cos\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

In der Tat, es sei (a_n) die Folge gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{n2\pi}$$

Siehe nächstes Blatt!

und es sei (b_n) die Folge gegeben durch

$$b_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}.$$

Beachte, dass $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ falls $n \to +\infty$. Wir berechnen

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos(n2\pi) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

und

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0;$$

der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert also nicht und die Funktion f' ist nicht stetig an der Stelle $x = 0$.