

Lösung - Serie 6

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Durch zweifache Anwendung der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

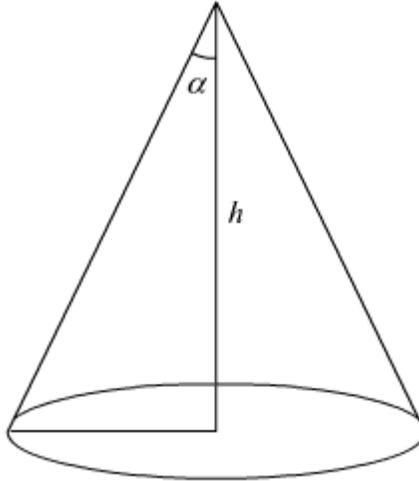
Stimmt diese Überlegung?

- (a) Ja.
- (b) Nein, da das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.
- (c) Nein, da Zähler und Nenner des ersten Bruchs für $x \rightarrow 1$ nicht beide gegen 0 streben.
- ✓ (d) Nein, da Zähler und Nenner des zweiten Bruchs für $x \rightarrow 1$ nicht beide gegen 0 streben.
- (e) Nein, da die beiden ersten Brüche keine auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion beschreiben.

Die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital ist anwendbar, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner beide gegen 0 (oder beide gegen ∞ , s. später in der Vorlesung) streben. Für $x = 1$ gilt $x^3 + x - 2 = 0$ und $x^2 - 3x + 2 = 0$. Damit ist die Regel von de l'Hôpital auf den ersten Bruch anwendbar und das erste "=" stimmt. Für den zweiten Bruch sind dagegen die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn, denn der Nenner hat an der Stelle 1 den Wert -1 und der Zähler den Wert 4. Vielmehr gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \frac{3 + 1}{2 - 3} = -4.$$

2. In einem geraden Kreiskegel sei die Höhe h genau bekannt. Der halbe Öffnungswinkel α wird gemessen, wobei der Messfehler $\Delta\alpha$ ist. Wie wirkt sich dieser Messfehler bei Berechnung des Volumens $V(\alpha)$ des Kegels aus?



- (a) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\tan(\alpha)\Delta\alpha$.
- ✓ (b) Der absolute Fehler $V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)$ ist proportional zu $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}\Delta\alpha$.
- (c) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ hängt von h ab.
- ✓ (d) Der relative Fehler $\frac{V(\alpha+\Delta\alpha)-V(\alpha)}{V(\alpha)}$ ist proportional zu $\frac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

Lösung: Die Gleichung für das Volumen eines geraden Kegels lautet wie folgt

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot h.$$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit Radius $\tan(\alpha)h$ und hat somit Flächeninhalt $\pi(\tan(\alpha)h)^2$. Deshalb gilt

$$V = V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \tan(\alpha)^2 h^3.$$

Wir berechnen mittels der Kettenregel

$$V'(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3} 2 \tan(\alpha) \tan(\alpha)' = \frac{\pi h^3}{3} 2 \tan(\alpha) \frac{1}{\cos(\alpha)^2} = \frac{2\pi h^3}{3} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3}.$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass

$$V(\alpha + \Delta\alpha) \approx V'(\alpha)\Delta\alpha + V(\alpha),$$

also gilt für den absoluten Fehler

$$V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha) \approx \frac{2\pi h^3}{3} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3} \Delta\alpha.$$

Siehe nächstes Blatt!

Für den relativen Fehler gilt

$$\frac{V(\alpha + \Delta\alpha) - V(\alpha)}{V(\alpha)} \approx \frac{\frac{2\pi h^3}{3} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3} \Delta\alpha}{\frac{\pi}{3} \tan(\alpha)^2 h^3} = \frac{2}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)} \Delta\alpha = \frac{4}{\sin(2\alpha)} \Delta\alpha.$$

3. Die Ableitung der Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$ ist ...

- (a) $f'(x) = x^x$.
- (b) $f'(x) = x^{x-1}$.
- ✓ (c) $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$.
- (d) $f'(x) = x + x \ln x$.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} = \left(\frac{x}{x} + \ln x \right) e^{x \ln x} = (1 + \ln x)x^x.$$

4. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist richtig?

- ✓ (a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.
- ✓ (b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.
- ✓ (c) Ist $f' > 0$ auf (a, b) , so ist f streng monoton wachsend.
- (d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf (a, b) .

Die Aussage (a) folgt aus der Definition der Ableitung. Die Aussagen (b) und (c) folgen aus dem Mittelwertsatz. Aber (d) ist falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf (a, b) , aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Beispiel: $f(x) = -x^3$.

5. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

- (a) f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$.
- (b) f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$.
- ✓ (c) f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$.
- (d) f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f' . Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ ist auch f' identisch gleich 0; also sind (a) und (b) falsch. Ein Beispiel wie $f(x) = x^3 - 3x$ mit $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann. Also ist (c) die einzig richtige Antwort.

Bitte wenden!

6. Berechnen Sie mit Hilfe der Bernoulli-de l'Hôpital-Regel die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(x) - \cos(x)}{\tan x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)\right)^2}{x \cos(x) - \sin(x)}.$

Lösung:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \tan^2 x} = 1$

b) Man bemerke zunächst, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1+t^2} = 1$. Somit haben wir also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{1+x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x \cos x - \sin x} &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{-2}{\cos^3 x} (-\sin x) + \sin x\right)}{\cos x - x \sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right)}{x} \\ &\stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} -2 \left(\left(\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} + \sin x\right) \left(\frac{2}{\cos^3 x} + 1\right) + \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right) \left(\frac{6 \sin x}{\cos^4 x}\right) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

7. Es sei x eine kleine Grösse. Finden Sie *lineare Näherungen* (d.h. die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0) für die folgenden Ausdrücke:

a) $f_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1$

b) $f_2(x) = e^{1+x}$

c) $f_3(x) = (1000 - x)^{\frac{1}{3}}$

d)* $f_4(x) = \prod_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365}\right).$

Lösung: Die lineare Ersatzfunktion im Punkt 0 ist gegeben durch $x \mapsto xf'(0) + f(0)$. Wir müssen also in jeder Teilaufgabe den Term $f'(0)$ und den Term $f(0)$ berechnen.

a) Wir berechnen

$$\left(\frac{1}{(1+x)^2} - 1\right)' = -\frac{2}{(x+1)^3},$$

und deshalb gilt

$$\frac{1}{(1+x)^2} - 1 \approx -2x.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Beachte

$$(e^{1+x})' = e^{1+x}$$

und deshalb

$$e^{1+x} \approx ex + e.$$

c) Weil

$$\left((1000 - x)^{\frac{1}{3}} \right)' = -\frac{1}{3(1000 - x)^{2/3}}$$

erhalten wir

$$(1000 - x)^{\frac{1}{3}} \approx -\frac{x}{300} + 10.$$

d) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten mit der verallgemeinerten Produktregel lösen. Die verallgemeinerte Produktregel lautet wie folgt:

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_{i-1} u'_i u_{i+1} \cdots u_n.$$

Falls also z.B. $n = 3$, dann gilt

$$(u_1 u_2 u_3)' = u'_1 u_2 u_3 + u_1 u'_2 u_3 + u_1 u_2 u'_3.$$

Wir berechnen also

$$\left(\prod_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365} \right) \right)' = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0, \ell \neq k}^{364} \left(1 - \frac{\ell x}{365} \right).$$

Wenn wir $x = 0$ setzen dann erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0, \ell \neq k}^{364} \left(1 - \frac{\ell \cdot 0}{365} \right) = \sum_{k=0}^{364} -\frac{k}{365} \prod_{\ell=0, \ell \neq k}^{364} 1 = -\frac{1}{365} \sum_{k=0}^{364} k.$$

Die Gauss'sche Summenformel (welche in der Schnellübung 1, Aufgabe 2 hergeleitet wurde) sagt uns

$$\sum_{k=0}^{364} k = \frac{365 \cdot 364}{2}.$$

Wenn man alles zusammenfasst, erhält man folgende Näherung

$$\prod_{k=0}^{364} \left(1 - \frac{kx}{365} \right) \approx -182x + 1.$$

8. Die Funktion $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall der Anfangsmasse m_0 mit Zerfallsrate α . Anhand einer Messung soll bestimmt werden, wie gross α für ein neues, unbekanntes Material ist.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beträgt die Masse $m_0 = 1024$ Gramm. Es wird gemessen, wann die Restmasse unter 1 Gramm fällt: Dies passiert nach 10 Sekunden mit einem Messfehler von < 0.1 Sekunden, also

$$m(10 + \Delta t) = 1, \quad |\Delta t| < 0.1$$

a) Bestimmen Sie den relativen Messfehler der Zeitmessung: $\frac{\Delta t}{t}$.

Bitte wenden!

- b) Bestimmen Sie α unter der Annahme einer perfekten Zeitmessung, d.h. $\Delta t = 0$.
- c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $\Delta\alpha$ *ungefähr* proportional zu Δt und zu $\frac{1}{t^2}$ ist.
- d) Zeigen Sie, dass der relative Fehler $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ *ungefähr* proportional zum relativen Messfehler der Zeit ist.
- e) Berechnen Sie die Näherungen $d\alpha$ und $\frac{d\alpha}{\alpha}$ durch die lineare Ersatzfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit den echten Fehlern. Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) $\frac{\Delta t}{t} < \frac{0.1}{10} = 1\%$.

- b) Falls $\Delta t = 0$, haben wir $1 = m(10) = 1024e^{-10\alpha}$. Wir lösen nach α :

$$\frac{1}{1024} = e^{-10\alpha} \Leftrightarrow -10\alpha = \ln\left(\frac{1}{1024}\right) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{10} \ln(2^{10}) = \ln(2).$$

- c) Wir finden zuerst eine Formel für $\alpha(t)$, wobei t die Zeit ist, für die $m(t) = 1$. Also $\alpha(t)$ ist die Zahl, die die Gleichung $1 = m_0 e^{-\alpha(t) \cdot t}$ löst.

Analog wie in Teilaufgabe **b)** erhalten wir $\alpha(t) = \ln(m_0) \frac{1}{t}$. Daraus folgt,

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha(t + \Delta t) - \alpha(t) = \ln(m_0) \frac{1}{t + \Delta t} - \ln(m_0) \frac{1}{t} \\ &= -\ln(m_0) \frac{\Delta t}{t(t + \Delta t)}. \end{aligned}$$

Da $t + \Delta t \approx t$, folgen die beide Proportionen.

- d) Aus Teilaufgabe **c)** haben wir $\Delta\alpha = -\alpha \frac{\Delta t}{t + \Delta t}$. Nochmals mit $t + \Delta t \approx t$ erhalten wir

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -\frac{\Delta t}{t}.$$

- e) Durch die lineare Ersatzfunktion erhalten wir

$$d\alpha = \alpha' dt = -\alpha \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dt}{t}.$$

So die Ausdrücke sind gleich, wenn man $dt = \Delta t$ und $t + \Delta t \approx t$ annimmt. Der relative Messfehler in der Zeitmessung schlägt sich linear im relativen Messfehler der Zerfallsrate nieder.

9. a) Es sei eine stetige, in (a, b) differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.

- b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe (a) die Relation

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.

Siehe nächstes Blatt!

- c)* Wenn die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwar *stetig, aber nicht differenzierbar ist*, gilt der Mittelwertsatz im Allgemeinen nicht. Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges f an, so dass der Mittelwertsatz nicht gilt.

Lösung:

- a) Wenn f konstant ist, dann ist natürlich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für die umgekehrte Implikation nehme man $x_1, x_2 \in [a, b]$, wobei o.B.d.A. $x_1 < x_2$. Die Einschränkung $f|_{(x_1, x_2)}$ ist differenzierbar. Der Mittelwertsatz garantiert die Existenz eines $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$$

ist, aber laut unserer Annahme ist $f'(\xi) = 0$ und deshalb ist $f(x_1) = f(x_2)$. Dies heisst, dass f konstant ist.

- b) Man definiere

$$f: x \mapsto \arcsin x + \arccos x,$$

mit $D(f) = [-1, 1]$. Die Funktion f ist stetig und in $(-1, 1)$ differenzierbar, mit

$$f'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Teilaufgabe (a) zeigt, dass f konstant ist. Somit ist für alle $x \in [-1, 1]$ z.B.

$$\arcsin x + \arccos x = f(x) = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

- c)* Wir wählen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & x \leq c, \\ b - x, & x > c, \end{cases}$$

wobei $c := \frac{a+b}{2}$ den Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$ bezeichnet. Diese Funktion ist auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ stetig und lediglich an der Stelle c nicht differenzierbar, da sie dort einen Knick hat. Links vom Knick beträgt die Ableitung $+1$, rechts davon -1 . Die Sekantensteigung lautet aber

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0 \neq \pm 1$$

und deshalb gilt der Mittelwertsatz nicht. Eine Skizze der Funktion und der Sekante ist auf dieser Seite am oberen Ende.

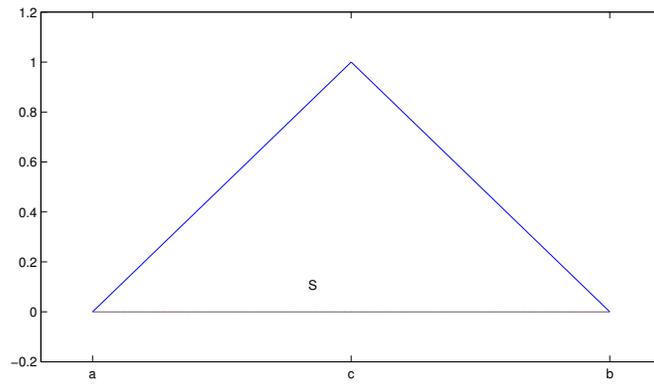


Abbildung 1: Die Funktion aus Aufgabe 5(c) (blau) und die zugehörige Sekante (schwarz).