Lösung - Serie 9

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = \left(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\right).$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

√ (b) falsch

Es gilt $\dot{\vec{r}}(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t\right)$ und damit

$$\begin{aligned}
\langle r(t), \dot{r}(t) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= e^{2t}(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)) \\
&= e^{2t} > 0, \text{ für alle } t.
\end{aligned}$$

2. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

√ (b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

√ (d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

Durch partielle Integration erkennen wir, dass die Stammfunktionen von f Funktionen der Form $xe^x - e^x + 7x + C$ für eine Konstante C sind. Die Funktionen in (b) und (d) sind dieser Form, die Funktionen in (a) und (c) nicht.

3. Es seien $C, l \in (0, +\infty)$. Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho = Ce^{l\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

√ (a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.

Richtig. Eine Parametrisierung der Bernoullischen Spirale (Spira mirabilis) wird durch

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) & = & Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \\ y(\varphi) & = & Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \end{cases}$$

gegeben, und also

$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = \begin{cases} x(\varphi) & = & Cle^{l\varphi}\cos(\varphi) - Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) \\ y(\varphi) & = & Cle^{l\varphi}\sin(\varphi) + Ce^{l\varphi}\cos(\varphi) \end{cases}$$

Der Winkel α wird nach definition des Skalarproduktes folgenderweise berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}(\varphi)\cdot\dot{\vec{r}}(\varphi)}{|\vec{r}(\varphi)|\cdot|\dot{\vec{r}}(\varphi)|} = \frac{C^2le^{2l\varphi}}{\sqrt{C^2e^{2l\varphi}}\cdot\sqrt{C^2l^2e^{2l\varphi}+C^2e^{2l\varphi}}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}},$$

der unabhängig von φ ist.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Falsch. Sehen Sie bitte die Antwort c).

√ (c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

Richtig. Die Gleichung

$$y(\varphi) = Ce^{l\varphi}\sin(\varphi) = 0,$$

hat die Lösungen $\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Die Schnittpunkte mit der positiven x-Achse sind also

$$(x(2\pi k), 0) = (Ce^{2l\pi k}, 0), k \in \mathbb{Z}.$$

Der Quotient ist also unabhängig von k und ist gleich

$$\frac{x(2\pi k)}{x(2\pi(k-1))} = \frac{Ce^{2l\pi k}\cos(2\pi k)}{Ce^{2l\pi(k-1)}\cos(2\pi(k-1))} = e^{2\pi l}.$$

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

Falsch. Im Spezialfall $C = l = 1$ ist die Evolute der Bernoullische Spirale

$$\vec{r}(\varphi) = (e^{\varphi}\cos(\varphi), e^{\varphi}\sin(\varphi))$$

durch die Kurve

$$\vec{r}(\varphi) = (-e^{\varphi}\sin(\varphi), e^{\varphi}\cos(\varphi))$$

gegeben. Insbesondere kriegen wir diese Evolute durch einer Drehung der Spirale von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn.

Siehe nächstes Blatt!

4. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$;

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$;

(c) $f'(x) = \cos(x)$;

$\surd$ (d) $f'(x) = \sin(x)$.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

5. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

$\surd$ (a) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,dt$

$\surd$ (b) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$

(c) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$

$\surd$ (d) $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,dt$

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend. Eine geometrische Begründung: Ausser bei $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0 wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Bitte wenden!

6. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung:

a) Definiert man $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \vec{\gamma}(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1, \sinh t)$ und $\ddot{\vec{\gamma}}(t) = (0, \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius r_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$ ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2(0)}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum z_0 ist durch die folgende Formel gegeben (Evolute):

$$z_0 = \vec{\gamma}(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei $n : t \longmapsto n(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$ der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ von $\frac{\pi}{2}$ im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für n gilt:

$$n(t) = (-\sinh t, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh(0), 1)}{\cosh(0)} = (0, 2).$$

b) Das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Radius r_0 und Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= \vec{\gamma}(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} = (t, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t, 1)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t, \cosh t + \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t). \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{z}(0) = \tanh^2(0) \cdot (1, \sinh(0)) = (0, 0)$.

[1] Falls Sie r_0 bei a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.

Siehe nächstes Blatt!

7. Die Ebene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

b) Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Kurve in folgende Geogebra-App eingeben:

`https://www.geogebra.org/m/gphzjueb#material/VSBerkaq`

c) Berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ sowie die Parametrisierung der Evolute.

d) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in **(a)** gelisteten Eigenschaften.

e) Überprüfen Sie wiederum Ihr Resultat, indem Sie Ihr Resultat in die App aus **(b)** eingeben und mit folgendem Ecolutenrechner vergleichen:

`https://www.geogebra.org/m/gphzjueb#material/nbv3bk92`

Lösung:

a)
- **Schnittpunkte mit der x-Achse**: es muss $y(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ erhalten wir

$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow 2\sin t(1 + \cos t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ oder } t = \pi.$$

Die Steigung der Tangente im Punkt $(x(t), y(t))$ ist

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\frac{\cos t + \cos 2t}{\sin t + \sin 2t}.$$

Für $t = 0$ haben wir: $x(t) = 3$ und die Steigung ist $+\infty$, das heisst: die Tangente im Punkt $(3, 0)$ ist eine vertikale Gerade.
Wir haben $x(\pi) = -1$ und für $t \to \pi$ gilt es:

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{\text{B-H}}{=} \lim_{t\to\pi} \frac{\sin t + 2\sin 2t}{\cos t + 2\cos 2t} = 0.$$

Also die Tangente im Punkt $(-1, 0)$ ist eine horizontale Gerade.
- **Schnittpunkte mit der y-Achse**: es muss $x(t) = 0$ gelten. Mit der Formel $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ erhalten wir

$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 t + 2\cos t - 1 = 0 \quad 2u^2 + 2u - 1 = 0,$$

wobei wir die Substitution $u = \cos t$ benutzt haben. Diese Gleichung hat Lösungen $u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Da $u = \cos t \geq -1$ und $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$, haben wir nur die Lösung $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Es gibt zwei Zahlen $t \in [0, 2\pi]$ für die $\cos(t) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Nämlich $t_1 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ und $t_2 = 2\pi - t_1$. Es gilt:

$$y(t_1) \approx 2.55 \quad y(t_2) \approx -2.55,$$

und die Steigungen der Tangenten sind

$$\frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\dot{y}(t_2)}{\dot{x}(t_2)} = -\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} < 0.$$

Bitte wenden!

- **Punkte, wo die Tangente eine horizontale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung gleich Null ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{y}(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 0$. Dies gilt für $t = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Wir wissen schon, dass für $t = \pi$ die Tangente horizontal ist. Für die andere zwei Punkte gilt $\dot{x}(t) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$. Also haben wir eine horizontale Tangente in den Punkten

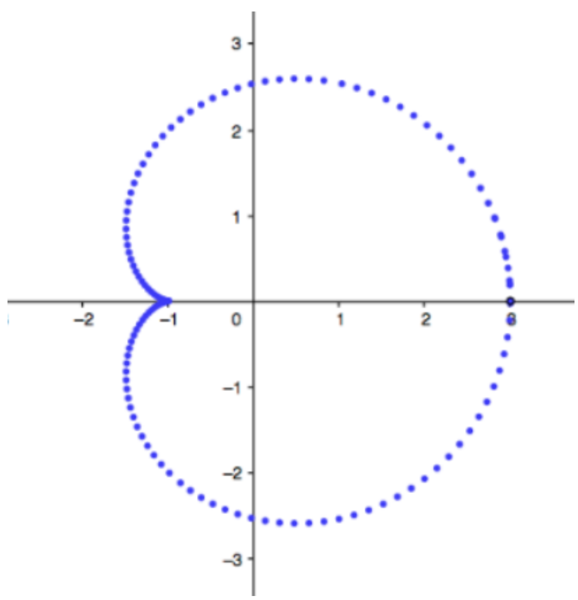
$$\begin{aligned}
(x(\pi), y(\pi)) &= (-1, 0), \\
\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \\
\left(x\left(\frac{5\pi}{3}\right), y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

- **Punkte, wo die Tangente eine vertikale Gerade ist**, das heisst ihre Steigung $+\infty$ ist. Die Tangente kann horizontal sein, nur falls $\dot{x}(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = 0$. Dies gilt für $t = 0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. Für $t = 0$ wissen wir schon, dass die Tangente vertikal ist und für $t = \pi$, dass die Tangente horizontal ist. Es gilt $\dot{y}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \dot{y}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \neq 0$ und somit ist $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \infty$. Also haben wir eine vertikale Tangente in den Punkten

$$\begin{aligned}
(x(0), y(0)) &= (3, 0) \\
\left(x\left(\frac{2\pi}{3}\right), y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\
\left(x\left(\frac{4\pi}{3}\right), y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Mit diesen Eigenschaften, kann man die Kurve skizzieren.

b) Die Kurve ist:



c) Für eine ebene Kurve mit der Parameterdarstellung $(x(t), y(t))$ kann man die Krümmung durch

Siehe nächstes Blatt!

die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}.$$

In unserem Fall sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) \\ 2\sin t + \sin(2t) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t - 2\sin(2t) \\ 2\cos t + 2\cos(2t) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\cos(2t) \\ -2\sin t - 4\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Rechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= (-2\sin t - 2\sin(2t))^2 + (2\cos t + 2\cos(2t))^2 \\ &= 4 + 4 + 8(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\ &= 8(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t) &= (-2\sin t - 2\sin(2t))(-2\sin t - 4\sin(2t)) - (-2\cos t - 4\cos(2t))(2\cos t + 2\cos(2t)) \\ &= 8 + 4 + 12(\sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)) \\ &= 12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t)). \end{aligned}$$

aus. Daher kriegen wir

$$k(t) = \frac{12(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))}{8^{\frac{3}{2}}(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4(1 + \sin t \sin(2t) + \cos t \cos(2t))^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{4(\cos(t) + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

wobei haben wir benutzt, dass $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ und $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$.

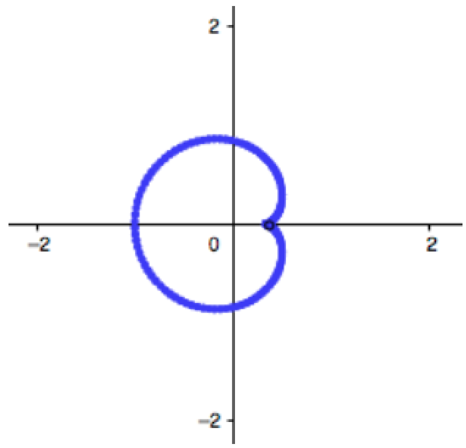
Die Parameterdarstellung der Evoluten ist

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) - \dot{y}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \\ y(t) + \dot{x}(t)\frac{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \end{pmatrix}.$$

Mit den obigen Berechnungen kriegen wir

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos(2t) - (2\cos t + 2\cos(2t))\frac{2}{3} \\ 2\sin t + \sin(2t) + (-2\sin t - 2\sin(2t))\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cos t - \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

d) Das kann analog wie in Teilaufgabe **a)** gemacht werden.



8. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int \left(x^2+1\right)^2\, dx$

b) $\int \tan^2 x\, dx$

c) $\int x^2 \ln x\, dx$

d) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin x\, dx$

e) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

Lösung:

a) $\int (x^2+1)^2\, dx = \int (x^4+2x^2+1)\, dx = \int x^4\, dx + 2\int x^2\, dx + \int 1\, dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C.$

b) $\int \tan^2(x)\, dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1\right)\, dx = \tan(x) - x + C.$

c) $\int x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$

d) $\int\limits_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + \int\limits_0^\pi 2x\cos x\, dx = \pi^2 + \left[2x\sin x\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi 2\sin x\, dx = \pi^2 - 4.$

e) Wir benutzen partielle Integration: wir leiten x ab und integrieren $\frac{1}{\sin^2 x}$. Es gilt zunächst $\cot' x = -1 - \cot^2 x$ und damit

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int (1+\cot^2 x)\, dx = -\cot x + C,$$

Siehe nächstes Blatt!

also

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int \underbrace{x}_{\downarrow} \cdot \overbrace{\tfrac{1}{\sin^2 x}}^{\uparrow}\,dx = x\cdot(-\cot x) - \int 1\cdot(-\cot x)\,dx$$

$$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C.$$

Der Pfeil $\downarrow$ bzw. $\uparrow$ bedeutet dabei ableiten bzw. integrieren.
Im letzten Schritt haben wir die *logarithmische Ableitung* benutzt: Es gilt immer $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ unter Benützung der Kettenregel (sofern $f(x)$ nirgends Null ist).

9. Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b$, $a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

Lösung: Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind durch die Nullstellen von $-ax^2 + b$ gegeben, nämlich $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Die Fläche unter der Parabel ist wegen der Symmetrie gegeben durch

$$F(a,b) = 2\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(-ax^2 + b\right)\,dx = 2\left[-\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

$$= 2\left(-\frac{a}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} + b\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}}\right) = \frac{4}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{1/2}}$$

Es gilt $F(a,b) = \frac{4}{3}$ genau dann, wenn $a = b^3$. Somit ist die gesuchte Schar gegeben durch

$$f(x) = -b^3x^2 + b,\; b > 0.$$