Schnellübung 3

1. **a)** Es sei $w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Wir nehmen an, dass $b \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die beiden Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 = w$ durch

$$z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{|w| + a}{2}} + i\,\mathrm{sgn}(b) \sqrt{\frac{|w| - a}{2}} \right)$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $\mathrm{sgn} \colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichenfunktion, gegeben durch

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0; \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

für eine reelle Zahl x.

b) Berechnen Sie mithilfe von Teil (a) die komplexen Quadratwurzeln von $-3 + 4i$.

2. Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sin(3x) + 4\sin(x)^3 - 3\sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass $f''(x) + 9f(x) = 0$.
(*Bemerkung*: Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, welche später in der Vorlesung noch behandelt werden wird.)

b) Benutzen Sie die Additionsformeln für $\sin$ und $\cos$ um zu zeigen, dass $f(x) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichheit $-\cos(3x) + 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

3. Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls f eine gerade Funktion ist, dann ist f' eine ungerade Funktion.

4. Berechnen Sie $f' \colon D(f) \to \mathbb{R}$ für

Bitte wenden!

a) $f\colon [-1,1] \to [0,\pi],\ x \mapsto \arccos(x);$

b) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(x^{\frac{1}{3}} + \sin\left(\arctan(x)\right)\right)^{2017};$

c) die Umkehrfunktion f von $g\colon (0,+\infty) \to (0,2),\ x \mapsto 2e^{-x^2}.$