D-MAVT, D-MATL | Analysis I | HS 18
Dr. Andreas Steiger

Schnellübung 4

1. Es sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \sinh(2x) - 2\sinh(x)\cosh(x).$$

a) Zeigen Sie $f''(x) - 4f(x) = 0$.

b) Zeigen Sie $f(x) + \frac{1}{2}f'(x) = 0$. Wieso folgt daraus, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

c) Zeigen Sie $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Berechnen Sie, mit Hilfe der *Bernoulli-Hôpital*-Regel folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-4x} - 1}{2x^2 - 8x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{\tan(\pi x/4) - 1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x \ln^2(x)}$

3. Es sei

$$f(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + \cdots + x,$$
$$g(x) = \ln(e^x - x)\ln(e^x - x^2)\cdots\ln(e^x - x^n).$$

Zeigen Sie, dass gilt $f(x) = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$ und $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$.

Gilt auch $f(x) = o(g(x))$ oder $g(x) = o(f(x))$?