Schnellübung 6

1. Ein *Gleichdick* ist eine geometrische Figur, die in jede gleiche Richtung gleich dick ist. Oder anders gesagt: Während ein Gleichdick vorwärts gerollt wird, bleibt der höchste Punkt zu jedem Zeitpunkt auf der gleichen Höhe. Ein Beispiel dafür ist ein Kreis, aber es gibt andere Figuren, die diese Eigenschaft ebenfalls haben.

Das *Reuleaux-Dreieck* besteht aus einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a und drei auf die Seiten gesetzten Kreisabschnitten. Die Kreisabschnitte sind dabei so konstruiert, dass man um jeden Dreieckseckpunkt einen Kreisbogen mit dem Radius der Dreiecksseite zeichnet.

a) Beweisen Sie, dass das Reuleaux-Dreieck ein Gleichdick ist.

b) Bestimmen Sie den Umfang des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a (des inneren Dreiecks, wie oben beschrieben).

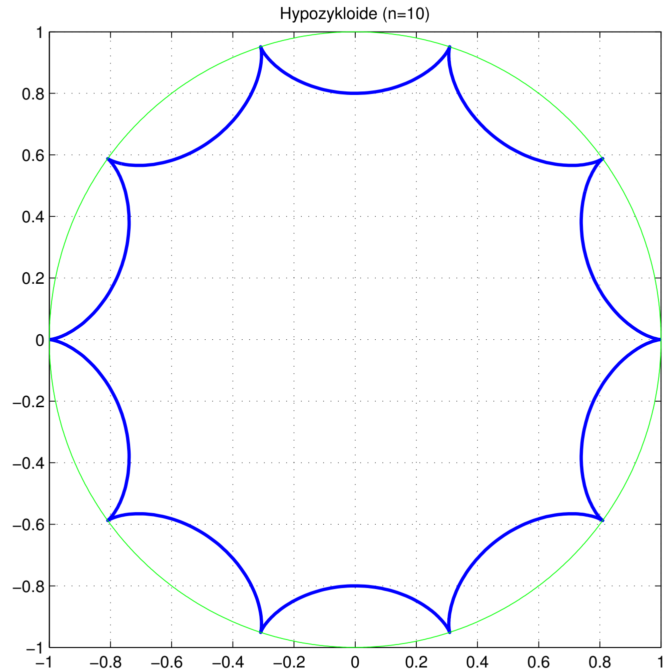
c) Bestimmen Sie die Fläche des Reuleaux-Dreiecks mit Seitenlänge a.

2. Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Im Innern eines Kreises mit Radius 1 rolle ein kleiner Kreis C mit Radius $1/n$ ab. Ein Punkt der Peripherie des Kreises C beschreibt dann eine geschlossene Kurve K (eine *Hypozykloide*), welche durch die Parametrisierung $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

$$x(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\varphi + \cos((n-1)\varphi)),$$
$$y(\varphi) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\varphi - \sin((n-1)\varphi))$$

beschrieben wird.

Bitte wenden!



a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von n, die durch die Kurve K eingeschlossene Fläche.

b) Für welche n ist diese Fläche grösser als $2/3$ der Fläche des grossen Kreises?

3. Es sei $h \in [0, 1]$ eine reelle Zahl und T das Tetraeder mit Ecken in $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$.

a) Berechne den Flächeninhalt $S(h)$ des Schnitts von T mit der Ebene $z = h$.

b) Berechne den Volumeninhalt $V(h)$ des Tetraederstumpfes, der durch Abschneiden der Spitze von T durch die Ebene $z = h$ entsteht. Was gilt für $h = 1$?

4. Ein einfacher Steuerungsmechanismus eines Spielzeugautos besteht aus einer Zahnleiste aus Hartplastik, die die beiden Vorderräder des Autos verbindet, und einem Plastikzahnrad, das mit dem Lenkrad verbunden ist. Wird das Plastikzahnrad gedreht, wird die Zahnleiste seitwärts bewegt und die Räder des Autos drehen sich.

a) Die maximale Höhe der Zahnleiste (gemessen an der Spitze eines Zahns) beträgt 10mm, die minimale Höhe 7mm, die Breite 60mm und die Dicke 6mm.

Siehe nächstes Blatt!

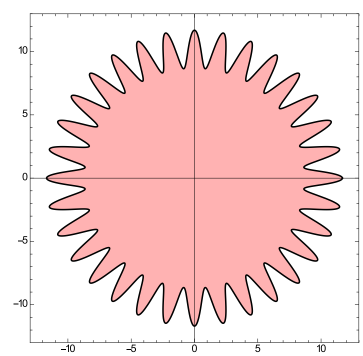
Die Zahnleiste beginnt und endet mit einem „Halbzahn“ und besteht aus 29 Zähnen (siehe die Abbildung). Berechnen Sie das Volumen der Zahnleiste in Kubikmillimetern unter der Annahme, dass die obere Begrenzung der Zahnleiste eine Sinuskurve beschreibt.[1]

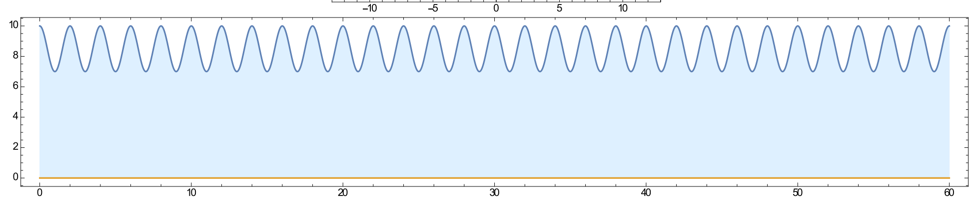
b) Das Zahnrad hat ebenso eine Dicke von 6mm und die Kurve, die die äussere Begrenzung des Zahnrads beschreibt, ist durch folgende parametrische Gleichungen gegeben:

$$x(t) = \left(\frac{3}{2}\cos(64\pi t) + \frac{32}{\pi}\right)\cos(2\pi t)\,,$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}\cos(64\pi t) + \frac{32}{\pi}\right)\sin(2\pi t)\,,$$

wobei $0 \leq t \leq 1$ und alle Einheiten in Millimetern gegeben sind. Berechnen Sie das Volumen des Zahnrads in Kubikmillimetern.[2] *(Hinweis: Parametrisieren Sie die Kurve in Polarkoordinaten.)*





[1] Lösung: 3060mm^3.

[2] Lösung: $\frac{6144}{\pi} + \frac{27\pi}{4} \approx 1976.9\text{mm}^3$.