Serie 13 - Ferienserie

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch 09.01.2019* um 18:00 Uhr

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Die Abgabe erfolgt in der Mittwochvorlesung in der ersten Vorlesungswoche im FS19.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wenn man zwei beliebig oft differenzierbare Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

(a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle x_0^2.

(d) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ ist

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 2

(d) ∞

3. Es sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $P_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

(a) $1 + \frac{x^2}{2}$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 + x + x^2$

(d) $1 + x^2$

4. Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^{k-1}$

5. In welchem Bereich konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3(-1)^{k+1}(2x-1)^{2k}}{5^{2k}}$?

(a) $(-1, 2)$

(b) $(-4, 5)$

(c) $(-2, 2)$

(d) $(-2, 3)$

Siehe nächstes Blatt!

6. Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sinh(x)$;

b) $f(x) = x^2 \ln(1 + x^4)$.

7. Bestimmen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der Funktion

$$x \longmapsto \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

8. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Reihenentwicklung

$$e^x \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^k.$$

Hinweis: Setzen Sie $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ein, multiplizieren Sie aus und verwenden Sie die Exponentialreihe.

9. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1 - x + x^2 - x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

10. Berechnen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x + 3)^n$.