D-MAVT/D-MATL — Analysis I — HS 2018
Dr. Andreas Steiger

Serie 4

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 24.10.2018 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 24.10.2018* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Sei $z := 2\exp\left(\frac{\pi}{6}i\right)\cdot(5\sqrt{3}+b\cdot i)$. Für welches $b\in\mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

(d) $5\sqrt{3}$

(e) Keines von diesen.

2. Sei $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

(a) $64(i\sqrt{2}-\sqrt{2})$.

(b) $-32(i\sqrt{2}-\sqrt{2})$.

(c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.

(d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

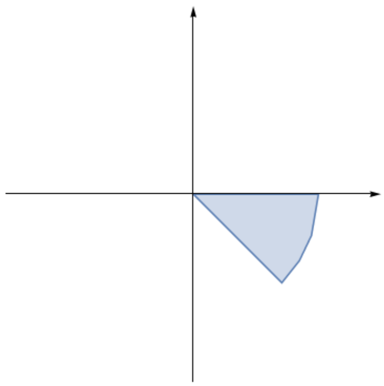
Bitte wenden!

3. Es sei

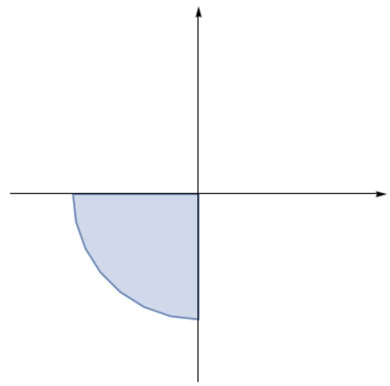
$$A := \left\{ re^{i\varphi} : r \in [0,1], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \right\} \subset \mathbb{C}$$

und es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z^2$. Welche der folgenden Mengen entspricht $f(A)$?

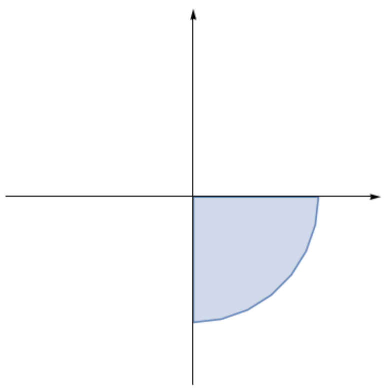
$a)$



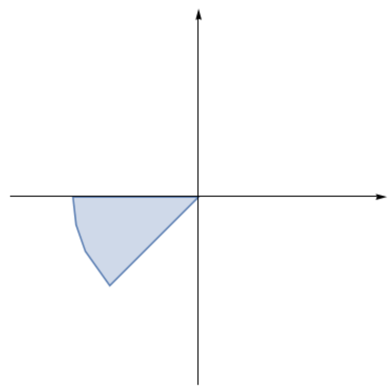
$b)$



$c)$



$d)$



(a) a)

(b) b)

(c) c)

(d) d)

Siehe nächstes Blatt!

4. Was ist $(1+i)^{2000}$?

(a) $\sqrt{2}e^{500\pi i}$

(b) -2^{1000}

(c) $(2i)^{1000}$

(d) $2^{1000}e^{\frac{\pi i}{4}}$

(e) 2^{2000}

5. **a)** Gegeben seien die komplexe Zahlen $z_1 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$ und $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Berechnen Sie Betrag und Argument von $z = \frac{z_1}{z_2}$.

b) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg((1+i)^2) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{\exp(i\pi)}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.

6. **a)** Bestimmen Sie die kleinste Zahl $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, $|w| < 1$ gilt $|w+z| < C$.

b) Die Zahlen

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{16}} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{15\pi}{16}}$$

seien beides Lösungen der Gleichung $z^n = c$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ sowie $c \in \mathbb{C}$.

7. Zeigen Sie die folgende trigonometrische Beziehungen:

a) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x)$.

b) $\sin(3x) = 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$.