Serie 8

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 21.11.2018 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 21.11.2018* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Was für eine Kurve stellt die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(1-t^2) \\ \cos(1-t^2) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dar?

(a) Ein Kreis.

(b) Eine Ellipse.

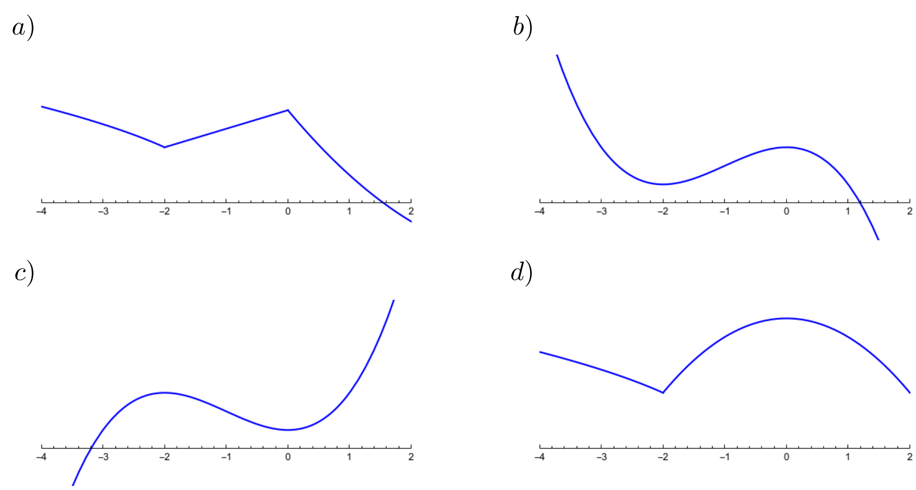
(c) Eine Parabel.

(d) Eine Gerade.

(e) Ein anderes Objekt.

(f) Diese Parametrisierung ist mathematisch nicht zulässig.

2. Gegeben sind die folgende Funktionen:



Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Alle Funktionen a)-d) sind differenzierbar.

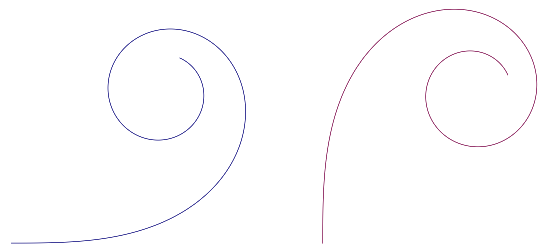
(b) Falls die zweite Ableitung der Funktionen b) und c) existiert, dann hat sie jeweils mindestens eine Nullstelle.

(c) Jede der Funktionen a)-d) hat eine Stelle mit verschwindender Ableitung.

(d) Die Funktion c) ist konvex.

Siehe nächstes Blatt!

3. Gegeben sind die Kurven K_1 (links) und K_2 (rechts), die beide für wachsenden Parameter t von aussen nach innen durchlaufen werden. Es bezeichnen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Krümmungen der beiden Kurven. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?



(a) k_1 ist positiv

(b) k_2 ist negativ

(c) $t \to k_1(t)$ ist monoton wachsend

(d) $t \to k_2(t)$ ist monoton fallend

4. Beschreiben Sie die Bewegung eines Punktes mit der Parametrisierung

$$[0, \tfrac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\sin 6t \\ \cos 6t \end{pmatrix}.$$

(a) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2,zweimaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(0, 1)$.

(b) Ellipse mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, vom Punkt $(0, 1)$ nach $(1, 0)$.

(c) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf im Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

(d) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, zweimaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn.

(e) Kreisbahn mit Mittelpunkt $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ und Radius 2, einmaliger Umlauf gegen den Uhrzeigersinn beginnend bei $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

Bitte wenden!

5. Die beiden in Polarkoordinaten (r, ϕ) gegebenen Kurven

$$\begin{array}{ccccl} K_1 & : & r & = & \sin^2 \phi \\ K_2 & : & r & = & \frac{1}{2}|\sin(2\phi)| \end{array}$$

schneiden sich für $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ in einem Punkt P. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t_1 im Punkt P an die Kurve K_1. Welcher der folgenden Punkte liegt nicht auf t_1?

(a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(d) $\left(1, \frac{6-\sqrt{2}}{2}\right)$

(e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

6. Gegeben sei die reelle Funktion

$$f : x \longmapsto x^{3/2}(x-2)^3$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und Nullstellen von f.

b) Wo ist f monoton wachsend? Monoton fallend? Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f, falls vorhanden, und unterscheiden Sie Minima und Maxima. Besitzt f globale Extrema?

c) Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

d) Wo ist f konvex? Wo ist f konkav? Bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte von f.

e) Mit der oben bestimmten Information skizziere man den Graphen von f.

7. Ein Kreis vom Radius r rollt im Innern eines Kreises vom Radius R ab ($r < R$). Die Kurve, die dabei ein fester Punkt P der Peripherie des kleinen Kreises beschreibt, heisst *Hypozykloide*. Bestimmen Sie für den Fall $R = 4r$ eine Parameterdarstellung sowie eine implizite Darstellung der Kurve und skizzieren Sie diese.

8. Das *Kartesische Blatt* ist die Kurve C gegeben durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t}{t^3+1}\,, \qquad y = \frac{t^2}{t^3+1},$$

wobei $-\infty < t < -1$ und $-1 < t < +\infty$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung, d.h. eine implizite Darstellung, von C.

Hinweis: Was ist $\frac{y}{x}$?

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ sowie die Tangenten in diesen Schnittpunkten.

c) In welchen Punkten sind die Tangenten parallel zu den Koordinatenachsen ?

9. Eine Kanonenkugel wird vom Punkt $(0, 0)$ aus mit Geschwindigkeit v unter einem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der positiven x-Achse abgeschossen. Behandelt man die Kugel als Punktmasse und orientiert die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse, ist die Bewegung beschrieben durch:

$$x(t) = v\cos(\varphi)t$$
$$y(t) = v\sin(\varphi)t - 5t^2.$$

a) Wie muss der Winkel φ bei vorgegebenem v gewählt werden, damit die Kugel möglichst weit fliegt, bevor sie auf dem Boden (der x-Achse) auftrifft? Argumentieren Sie, warum es sich bei dem von Ihnen gefundenen Wert tatsächlich um ein Maximum handelt!

b) Wo landet die Kugel bei diesem Abschusswinkel, wenn $v = 100$ ist?

Bitte wenden!

c)* (Bonusaufgabe, Physik!) In einer Quizsendung, die im Oktober 2018 im deutschen Privatfernsehen ausgestrahlt wurde, musste einer Kandidat folgende Schätzfrage beantworten:

In einem Guetsli sind etwa 60 Kilojoule an chemischer Energie gespeichert. Ein Sprengmeister erzeugt aus der Guetslimasse einen Sprengstoff, der in eine Abschussvorrichtung gegeben wird, die den optimalen Abschusswinkel aufweist.

In der Leichtathletikdisziplin ”Hammerwurf” wird eine an einem Stahldraht befestigte Kugel (der ”Wurfhammer”) möglichst weit geschleudert. Die Masse des gesamten Objekts beträgt 7.26 kg. Der seit über 30 Jahren bestehende Weltrekord liegt derzeit bei 86,74 Metern.

So ein Wurfhammer wird nun in die Abschussvorrichtung gelegt und die Sprengung gezündet. Schätzfrage: Wie weit fliegt der Wurfhammer?

Bei uns soll es jedoch ums Rechnen gehen statt ums Schätzen. Der überwiegende Teil der Energie des Guetslis wird über Abwärme, Schall und Luftwiderstand abgegeben. Wenn 8% der gesamten chemischen Energie in kinetische Energie umgewandelt werden kann, schlägt die Guetslikanone dann den Weltrekord?