Serie 9

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 28.11.2018 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 28.11.2018* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Betrachten Sie die Bernoulli'sche Spirale

$$\vec{r}(t) = \big(e^t \cos(t), e^t \sin(t)\big)\,.$$

Bestimmen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Punktes auf der Spirale steht immer senkrecht auf seinem Tangentialvektor.

(a) wahr

(b) falsch

2. Es sei f die Funktion $f(x) = xe^x + 7$. Welche der folgenden Funktionen sind Stammfunktionen von f?

(a) $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + 7x$;

(b) $g(x) = xe^x - e^x + 7x$;

(c) $g(x) = (x-1)e^x$;

(d) $g(x) = (x-1)e^x + 7x + \pi^4$.

3. Es seien $C, l \in (0, +\infty)$. Die Bernoullische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\varrho = Ce^{l\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *richtig*?

(a) Der Winkel zwischen den Ortsvektor $\vec{r}(\varphi)$ eines Punktes auf der Spirale und seinem Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(\varphi)$ ist konstant.

(b) Die Differenz der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(c) Der Quotient der x-Koordinaten von zwei sukzessiven Schnittpunkten der Spirale mit der positiven x-Achse ist konstant.

(d) Die Evolute der Bernoullischen Spirale mit $C = l = 1$ ist die Kardiode.

4. Es sei f die Funktion mit $f(x) = \int\limits_3^x \sin(t)dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3);$

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3);$

(c) $f'(x) = \cos(x);$

(d) $f'(x) = \sin(x).$

5. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t\,dt$

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$

(c) $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$

Siehe nächstes Blatt!

6. Gegeben ist die Parametrisierung der Kettenlinie

$$\vec{\gamma}\colon t \mapsto (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Krümmungsfunktion $t \mapsto k(t)$ der Kurve $\vec{\gamma}$ sowie den Radius r_0 und das Zentrum z_0 des Krümmungskreises an der Stelle $t = 0$.

b) Dieser Kreis (mit festem Radius r_0) rolle entlang $\vec{\gamma}$ ab.[1] Bestimmen Sie das Zentrum $\vec{z}(t)$ des Kreises mit Berührpunkt $\vec{\gamma}(t)$ sowie den Geschwindigkeitsvektor der Kurve $t \mapsto \vec{z}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

7. Die Ebene Kurve K sei gegeben durch die Parametrisierung

$$x(t) = 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t + \sin 2t \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Skizzieren Sie die Kurve anhand von Achsenabschnittspunkten, deren Tangenten, sowie Punkten, wo die Tangente horizontal oder vertikal liegt.

b) Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Kurve in folgende Geogebra-App eingeben:

`https://www.geogebra.org/m/gphzjueb#material/VSBerkaq`

c) Berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ sowie die Parametrisierung der Evolute.

d) Skizzieren Sie die Evolute anhand der in **(a)** gelisteten Eigenschaften.

e) Überprüfen Sie wiederum Ihr Resultat, indem Sie Ihr Resultat in die App aus **(b)** eingeben und mit folgendem Ecolutenrechner vergleichen:

`https://www.geogebra.org/m/gphzjueb#material/nbv3bk92`

8. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int \left(x^2 + 1\right)^2\, dx$

b) $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx$

c) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$

9. Bestimmen Sie die Menge aller Parabeln der Form $y = -ax^2 + b$, $a > 0, b > 0$, welche mit der x-Achse die Fläche $\frac{4}{3}$ einschliessen.

---

[1] Falls Sie r_0 bei a) nicht berechnet haben, können Sie $r_0 = 1$ annehmen.