Lösung - Schnellübung 2

1. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^3 - x$. Bestimmen Sie ein Intervall $I := [a, b)$, so dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen von p und skizzieren Sie den Graphen von p.

Lösung: Es gilt $p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ und somit hat p die Nullstellen $-1, 0, 1$. Wir definieren $I = [-1, 1)$. Im folgenden zeigen wir, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Zuerst zeigen wir die Surjektivität.

Es gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - x = +\infty$, weil $x \leq \frac{1}{2}x^3$ für alle $\sqrt{2} \leq x$. Somit

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x = \lim_{x \to +\infty} (-x)^3 + x = \lim_{x \to +\infty} -x^3 + x = -\left(\lim_{x \to +\infty} x^3 - x\right) = -\infty.$$

Weil $p(-1) = 0$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ folgt $p((-\infty, -1)) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \mathbb{R}_{<0}$ aus dem Zwischenwertsatz.

Weil $p(1) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ folgt $p([1, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus dem Zwischenwertsatz. Wir haben also gezeigt, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ surjektiv ist.

Nun zeigen wir die Injektivität. Nehme an das es $x, y \in \mathbb{R} \setminus I$ gibt, so dass $x \neq y$ und $p(x) = p(y)$. Um zu zeigen, dass $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ injektiv ist, müssen wir zeigen, dass es solche x, y nicht geben kann.

Zuerst bemerken wir, dass

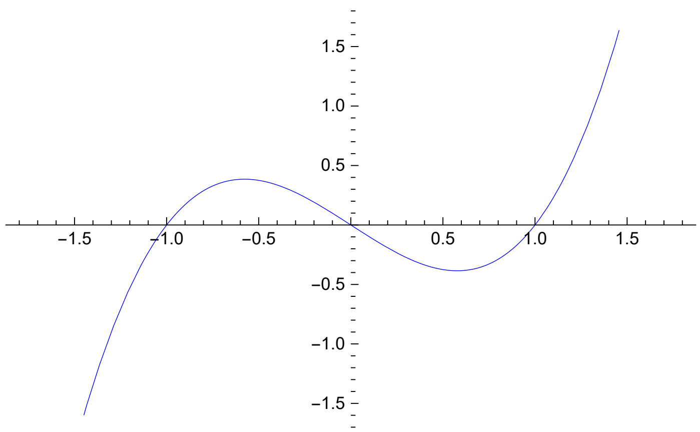
$$\begin{aligned} y^3 - y = x^3 - x &\iff \\ y^3 - x^3 = y - x &\iff \\ (y-x)(y^2 + xy + x^2) = y - x &\iff \\ y^2 + xy + x^2 = 1. & \end{aligned}$$

Desweiteren haben x, y dasselbe Vorzeichen, weil $p(x) = p(y)$ und $p(t) \leq 0$ falls $t \leq -1$ und $p(t) \geq 0$ falls $t \geq 1$ (siehe auch die Skizze). Somit $xy > 0$ und weil $|x|, |y| \geq 1$ erhalten wir

$$2 = 1^2 + 1^2 < x^2 + xy + y^2 = 1,$$

also $2 < 1$ was falsch ist, und somit gibt es keine $x, y \in \mathbb{R} \setminus I$, so dass $x \neq y$ und $p(x) = p(y)$. Die Funktion $p\colon \mathbb{R} \setminus I \to \mathbb{R}$ ist also injektiv.

Skizze:



2. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = 0$$

eine Lösung $x \in (-1, 1)$ besitzt.

Lösung: Wir bemerken zunächst, dass die ganzrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^4} + \frac{3}{(x-1)^9} = \frac{2}{(x+1)^4} - \frac{3}{(1-x)^9}$$

im Intervall $(-1, 1)$ stetig ist. Gesucht ist eine Nullstelle dieser Funktion. Wir stellen fest, dass

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty.$$

Somit gibt es $a \in (-1, 0)$ mit $f(a) > 0$ und $b \in (0, 1)$ mit $f(b) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in (a, b) \subset (-1, 1)$ mit $f(x) = 0$.

3. a) Gegeben sei die Funktion f mit Definitionsbereich $D(f) = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ durch die Abbildungsvorschrift $f(x) = \tan(x)$. Bestimme die inverse Funktion von f.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$\tan\big(\pi\big(1 + \tfrac{1}{2}\cos(x)\big)\big) = a.$$

Lösung:

a) Wir nutzen zunächst aus, dass die Funktion $\tan$ π-periodisch ist. Daher ist $f(x) = \tan(x) = \tan(x - \pi)$ für alle x. Wegen $x \in D(f) = \big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$ ist dann $x' := x - \pi \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$. Also ist

$$\arctan(f(x)) = \arctan(\tan(x - \pi)) = \arctan(\tan(x')) = x' = x - \pi.$$

Schreiben wir $y = f(x)$, so liefert Auflösen der obigen Gleichung nach x, dass $y \mapsto g(y) := \arctan(y) + \pi$ die gesuchte Inverse ist. Da $f : D(f) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist (d. h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in D(f)$ mit $f(x) = y$) kann als Definitionsbereich von g ganz $\mathbb{R}$ gewählt werden: $D(g) = \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Wegen $\cos(x) \in [-1,1]$ liegt das Argument des Tangens $\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))$ in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Da aber der Tangens weder für $\frac{\pi}{2}$ noch für $\frac{3\pi}{2}$ definiert ist, muss auf jeden Fall zunächst $\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ gelten, also $\cos(x) \in (-1,1)$. Wir erkennen in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ den Definitionsbereich $D(f)$ von f wieder, also den Wertebereich der inversen Funktion g. Aus

$$\tan(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))) = f(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))) = g^{-1}(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)))$$

folgt dann, dass

$$g^{-1}(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))) = a = g^{-1}(g(a))$$

ist. Da g injektiv ist, schließen wir daraus

$$\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)) = g(a) = \arctan(a) + \pi,$$

also

$$\cos(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(a).$$

Somit sind alle Lösungen von der Form

$$x = \pm\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan(a)\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Alternativer Lösungweg: Wegen der π-Periodizität der $\tan$-Funktion ist

$$a = \tan(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x))) = \tan(\frac{\pi}{2}\cos(x)).$$

Das Argument $\frac{\pi}{2}\cos(x)$ des Tangens liegt nun in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und wir können direkt die Umkehrfunktion $\arctan$ anwenden.

Ein weiterer, aber **falscher** *Lösungsweg:* Wir wenden die Funktion $\arctan$ direkt auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$\arctan(a) = \arctan(\tan(\pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)))) = \pi(1+\frac{1}{2}\cos(x)),$$

was offensichtlich nicht mit obigem Resultat übereinstimmt. Der Fehler liegt darin, dass im allgemeinen *nicht*

$$\arctan(\tan(z)) = z$$

gilt. Gleichheit besteht nämlich nur für $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da der Wertebereich von $\arctan$ per Definition $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist.

Fazit: Muss eine nicht injektive Funktion (wie hier der $\tan$) erst auf einen kleineren Definitionsbereich eingeschränkt werden, damit sie umkehrbar ist, so ist bei der Anwendung der Umkehrfunktion Vorsicht geboten! Das gleiche Problem tritt übrigens auch bei den Funktionen $\arcsin$ und $\arccos$ auf.

4. a) Der Schwerpunkt eines Objekts befindet sich am Punkt $5 + 2i$. An welchem Ort befindet sich der Schwerpunkt des Objekts, nachdem dieses in der komplexen Ebene um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt rotiert wurde?

b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z^2 - 3z + 2$ für $z = 2 + i$.

c) Wie müssen $p, q \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so dass

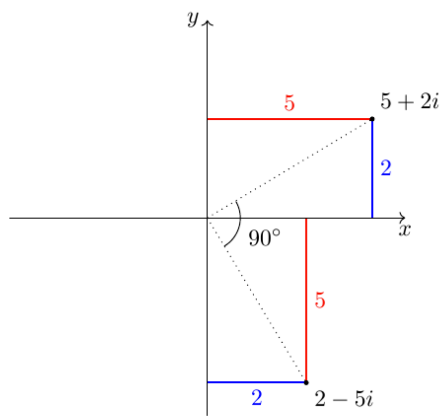
$$\frac{z+1}{pz+q} = 3 + 2i,$$

wobei $z = 7 + 5i$?

Bitte wenden!

Lösung:

a) Sei w die Position der Punkt $5+2i$ nach einer Rotation um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt. Aus dem Bild sehen wir, dass $\mathrm{Re}(w) = 2$ und $\mathrm{Im}(w) = -5$. Also $w = 2 - 5i$.



b) Wir berechnen für $z = 2 + i$:

$$z^2 - 3z + 2 = (2+i)^2 - 3(2+i) + 2 = 4 + 4i + i^2 - 6 - 3i + 2 = i - 1.$$

Also gilt $\mathrm{Re}(z^2 - 3z + 2) = -1$ und $\mathrm{Im}(z^2 - 3z + 2) = 1$.

c) Wir setzen $z = 7 + 5i$ in $\frac{z+1}{pz+q}$ ein:

$$\frac{z+1}{pz+q} = \frac{8+5i}{7p+q+5pi} = \frac{(8+5i)(7p+q-5pi)}{(7p+q)^2+(5p)^2} = \frac{74p+8q+5(q-p)i}{(7p+q)^2+(5p)^2}$$

Die Bedingung $\frac{z+1}{pz+q} = 3 + 2i$ und Vergleichung von Reell- und Imaginärteil geben das System

$$(7p+q)^2 + (5p)^2 = \frac{1}{3}(81p + 8q)$$
$$(7p+q)^2 + (5p)^2 = \frac{1}{2}(5q - 5p).$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten:

$$q = -177p.$$

Einsetzen in die erste Gleichung gibt: $p = 0$ oder $p = -\frac{1}{65}$. Die Lösung $p = 0$ wurde $q = 0$ implizieren, was nicht erlaubt ist. Somit haben wir $p = -\frac{1}{65}$ und $q = \frac{177}{65}$.