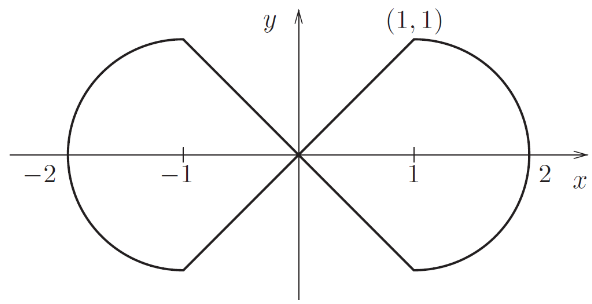
Lösung - Schnellübung 7

1. Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment der gezeichneten Fläche bezüglich der y-Achse.



Lösung: Da das Gebiet symmetrisch ist, ist das Trägheitsmoment J_y der ganzen Fläche gleich viermal dem Trägheitsmoment eines Viertels.

Für $x \in [0, 2]$ sei $G(x)$ die Ausdehnung in y-Richtung an der Stelle x. Um $G(x)$ zu finden, beachten wir, dass die Fläche durch die Gerade $y = x$ und den Kreis $(x-1)^2 + y^2 = 1$ berandet ist. Also gilt

$$G(x) = x \quad \text{für } 0 \le x \le 1$$
$$G(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} \quad \text{für } 1 \le x \le 2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
I_y &= 4\left(\int_0^1 x^2 x dx + \int_1^2 x^2 \sqrt{1-(x-1)^2} dx\right) \\
&= 4\left(\int_0^1 x^3 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 1)^2 \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt\right) \\
&= 4\left(\frac{x^4}{4}|_0{}^1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + 2\sin t + 1)(1-\sin^2 t) dt\right) \\
&= 1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^4 t + 2\sin t - 2\sin^3 t + 1 dt \\
&= 1 + 4(-\frac{3\pi}{16} + 2 - 2\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}) \\
&= 1 + \frac{5\pi}{4} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{11}{3} + \frac{5\pi}{4},
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $x - 1 = \sin t$, $dx = \cos t dt$ benutzt haben.

Bitte wenden!

2. Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Taylorreihe der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos(x^2)}.$$

Bestimmen Sie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Lösung: Die Funktion $g(x) = \frac{\sin x}{\cos(x^2)}$ ist ungerade. Daher sind alle geraden Koeffizienten

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0.$$

a_1, a_3 und a_5 findet man durch Koeffizientenvergleich. Aus

$$(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots) \cdot \left(1 - \frac{x^4}{2} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots;$$

folgt: $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{6}$ und $a_5 = \frac{61}{120}$.

3. Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

a) Ermitten Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als rationale Funktion dar.

c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als rationale Funktion zu erhalten.

Lösung:

a) Um den Konvergenzradius zu bestimmen, verwenden wir die Definition (bekannt aus der Vorlesung):

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+2)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 2.$$

b) Im Konvergenzbereich der Potenzreihe können wir die Reihe gliedweise integrieren, um an eine Stammfunktion zu gelangen. Das ergibt für $x \in (-2, 2)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{n+1}{2^n} x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} + C \overset{n+1=k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k + C. \end{aligned}$$

Aus der Forderung $F(0) = 0$ erhalten wir $C = 0$. Es gilt also $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} x^k$ für $x \in (-2, 2)$ (das heisst: $|x| < 2$). Mit Hilfe der geometrischen Reihe (beachte, dass $|\frac{x}{2}| < 1$) können wir $F(x)$ als rationale Funktion schreiben:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = x \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x}.$$

c) Da F eine Stammfunktion von f darstellt, gilt

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{2x}{2-x} = \frac{2(2-x) + 2x}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}.$$