

Lösung - Serie 12

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Liegt der Schwerpunkt eines rotationssymmetrischen Körpers immer auf dessen Rotationsachse?

- (a) Nein. Dies würde im Umkehrschluss bedeuten, dass sich alle Rotationsachsen eines Körpers in einem Punkt schneiden müssten, was nicht immer der Fall ist.
- ✓ (b) Ja. Andernfalls würde der Schwerpunkt nach der Rotation nicht mehr derselbe sein – er ist aber eindeutig.

2. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln(x)}} dx$$

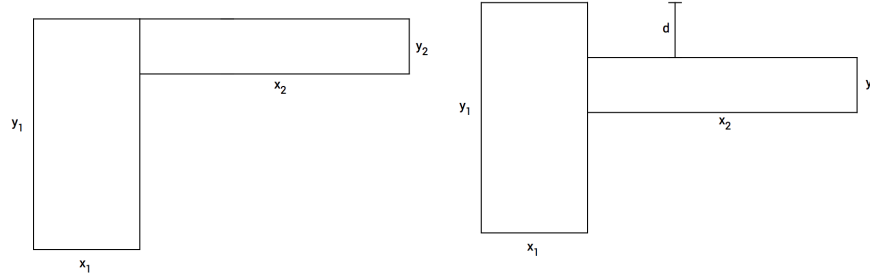
- (a) konvergiert.
- ✓ (b) divergiert.

Es gilt

$$e^{-\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{e^{\sqrt{\ln(x)}}} > \frac{1}{x},$$

da $x = e^{\ln(x)} > e^{\sqrt{\ln(x)}}$ für alle $x > e$ gilt. Da aber $\int_e^{\infty} \frac{1}{x} dx$ divergiert, muss folglich auch das obige Integral divergieren.

3. Betrachten Sie die folgenden Figuren, die beide aus den selben zwei homogenen Rechtecken zusammengesetzt sind und sich nur in der Platzierung des rechten (liegenden) Rechtecks unterscheiden (dieses ist um d nach unten versetzt):



Seien $x_1, y_1, x_2, y_2 > 0$. Welche Aussagen über die Schwerpunkte S_1 (der linken Figur) und S_2 (der rechten Figur) sind wahr?

- ✓ (a) Die x -Koordinaten von S_1 und S_2 stimmen überein.
- (b) Die Länge (bedeutet Ausdehnung in x -Richtung) des rechten (liegenden) Rechtecks kann so gewählt werden, dass die y -Koordinaten von S_1 und S_2 übereinstimmen.
- (c) Die Differenz der y -Koordinaten von S_1 und S_2 beträgt d .

Die erste Aussage ist wahr, da das Rechteck nur entlang der y -Achse bewegt wird und die Formel zur Bestimmung der x -Koordinate des Schwerpunkts,

$$x_S = \frac{\int xG(x) dx}{\int G(x) dx},$$

nur die jeweilige Ausdehnung in y -Richtung, nicht aber deren Lage, verwendet.

Intuitiv lassen sich die nächsten beiden Aussagen folgendermassen entkräften: Falls überdies auch die y -Koordinaten übereinstimmten, so wären die beiden Schwerpunkte ident, was absurd anmutet, also sollte die zweite Aussage falsch sein. Da der Schwerpunkt nicht nur vom rechten, sondern auch vom linken Rechteck abhängt, sollte die Masse des linken Rechtecks die Bewegung des Schwerpunkts entlang der y -Richtung in Relation zur Bewegung des rechten Rechtecks verlangsamen – dass der Schwerpunkt also im gleichen Ausmass wie das Rechteck bewegt wird scheint unlogisch, womit die dritte Aussagen widerlegt wäre.

Nun validieren wir unsere mathematische Intuition. Nehmen wir dazu an, dass die linke untere Ecke des linken (stehenden) Rechtecks im Ursprung platziert ist und (wie schon in der Abbildung beschriftet), dass das linke Rechteck eine Länge von x_1 und eine Höhe von y_1 , das rechte Rechteck eine Länge von x_2 und eine Höhe von y_2 hat. In der Folge berechnen wir die y -Koordinate von S_1 . Es gilt

$$H_1(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 \leq y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_1} = \frac{\int_0^{y_1} yH_1(y) dy}{\int_0^{y_1} H_1(y) dy} = \frac{x_1y_1^2 + x_2(2y_1y_2 - y_2^2)}{2(x_1y_1 + x_2y_2)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Auf ähnliche Weise erhalten wir die y -Koordinate von S_2 . Diesmal gilt

$$H_2(y) = \begin{cases} x_1 & \text{für } 0 \leq y < y_1 - y_2 - d, \\ x_1 + x_2 & \text{für } y_1 - y_2 - d \leq y \leq y_1 - d, \\ x_1 & \text{für } y_1 - d < y \leq y_1 \end{cases}$$

und folglich

$$y_{S_2} = \frac{\int_0^{y_1} y H_2(y) \, dy}{\int_0^{y_1} H_2(y) \, dy} = \frac{x_1 y_1^2 + x_2 (2(y_1 - d)y_2 - y_2^2)}{2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}.$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass die y -Koordinaten nur übereinstimmen, falls $d = 0$ gilt. Dies ist aber ausgeschlossen. Ausserdem ist die Differenz der y -Koordinaten gleich

$$y_1 - y_2 = \frac{x_2 y_2 d}{x_1 y_1 + x_2 y_2} = \left(1 - \frac{x_1 y_1}{x_1 y_1 + x_2 y_2}\right) d < d,$$

wie gewünscht.

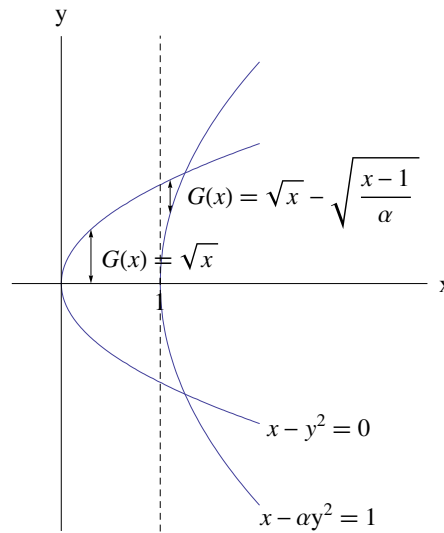
4. Es sei B_α (für $0 < \alpha < 1$) die von den beiden Parabelbögen $x - y^2 = 0$ und $x - \alpha y^2 = 1$ berandete Fläche. Für welche α liegt der Schwerpunkt von B_α ausserhalb der Fläche B_α ?

- (a) $\alpha < \frac{2}{3}$
- ✓ (b) $\frac{2}{3} < \alpha < 1$
- (c) $\alpha < \frac{3}{4}$
- (d) $\frac{3}{4} < \alpha < 1$
- (e) $\alpha < 1$

Wir benutzen die Formel aus dem Stammach-Skript, Kapitel III, und erhalten $y_s = 0$ (wegen Symmetrie) und

$$x_s = \frac{1}{A_\alpha} \int_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x G(x) dx,$$

wobei A_α der Flächeninhalt von B_α ist.



Es gilt

$$G(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x-1}{\alpha}}\right) & \text{für } 1 \leq x \leq \frac{1}{1-\alpha} \end{cases}$$

und A_α kann als Differenz der Flächen zwischen den Funktionen $x = y^2$ und $x = 1 - \alpha y^2$ und der

Siehe nächstes Blatt!

y -Achse berechnet werden. Diese zwei Funktionen schneiden sie sich für $y = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$ und so

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} 1 + \alpha y^2 dy - \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} y^2 dy \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} 1 + y^2(\alpha - 1) dy \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Dann berechnen wir

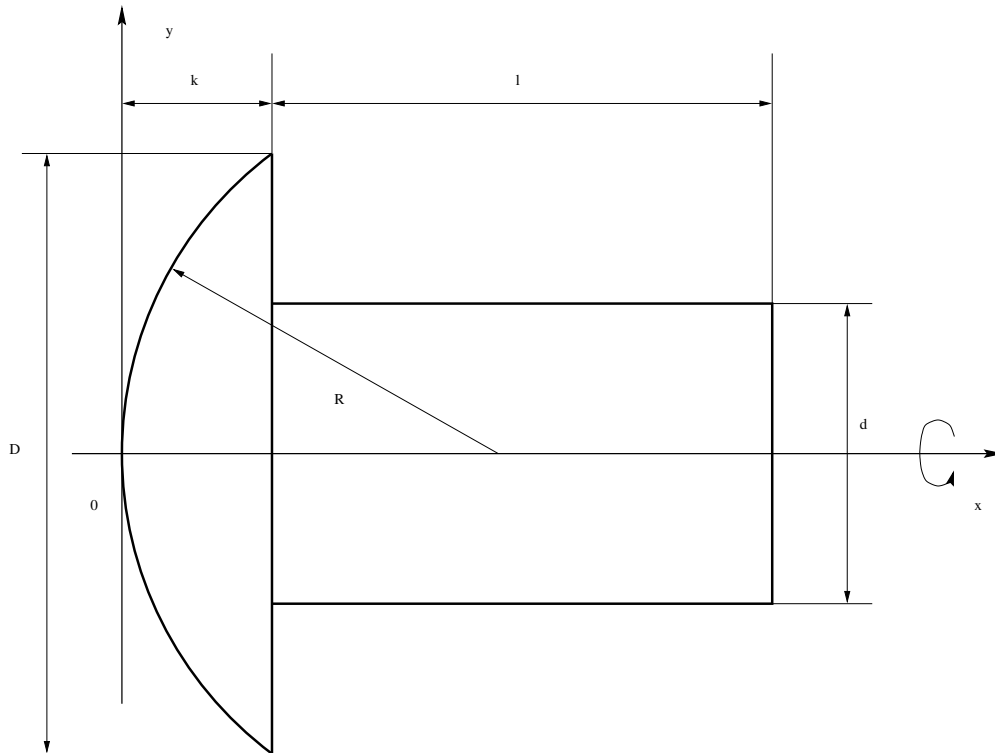
$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{A_\alpha} \left(\int_0^1 x \cdot 2\sqrt{x} dx + \int_1^{\frac{1}{1-\alpha}} x \cdot 2 \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x-1}{\alpha}} \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{A_\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x \cdot 2\sqrt{x} dx - \int_1^{\frac{1}{1-\alpha}} x \cdot 2\sqrt{\frac{x-1}{\alpha}} dx \right) \\ &\stackrel{u=x-1}{=} \frac{1}{A_\alpha} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (u+1) \sqrt{u} du \right) \\ &= \frac{1}{A_\alpha} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{4}{5} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{3}{5} \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{3-2\alpha}{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von B_α liegt ausserhalb der Fläche B_α

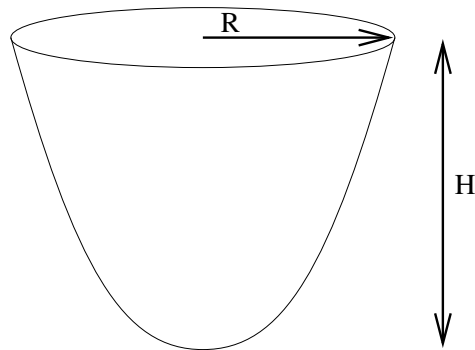
$$\Leftrightarrow x_s > 1 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha > 5 - 5\alpha \Leftrightarrow 3\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha > \frac{2}{3}.$$

Also $\frac{2}{3} < \alpha < 1$.

5. a) Berechnen Sie den Schwerpunkt des in der Figur dargestellten homogenen Halbrundniets. Es sind $d = 16\text{mm}$, $D = 28\text{mm}$, $k = 11.5\text{mm}$ und $l = 80\text{mm}$.



- b) Betrachten Sie das Rotationsparaboloid, das durch Rotation der Kurve $z = ax^2$ um die z -Achse gegeben ist:



Auf welcher Höhe liegt der Körperschwerpunkt?

Lösung:

- a) Dank dem Satz von Pythagoras haben wir

$$(R - k)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = R^2$$

und somit

$$R = \frac{D^2}{8k} + \frac{k}{2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das Volumen ist

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \left[\int_0^k \left(\sqrt{R^2 - (R-x)^2} \right)^2 dx + \int_k^{k+l} \left(\frac{d}{2} \right)^2 dx \right] \\
 &= \pi \left[\int_0^k (2Rx - x^2) dx + \int_k^{k+l} \frac{d^2}{4} dx \right] = \pi \left(Rk^2 - \frac{k^3}{3} + \frac{d^2 l}{4} \right) \\
 &= \pi \left(\frac{D^2 k}{8} + \frac{k^3}{6} + \frac{d^2 l}{4} \right) = \frac{\pi}{24} (3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l).
 \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen sind die y - und z -Komponenten des Schwerpunktes $y_S = z_S = 0$. Für die x -Komponente bekommen wir

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{V} \pi \left[\int_0^k x(2Rx - x^2) dx + \int_k^{k+l} x \left(\frac{d}{2} \right)^2 dx \right] \\
 &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{2Rk^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2}{8} ((k+l)^2 - k^2) \right) \\
 &= \frac{\pi}{V} \left(\frac{D^2 k^2}{12} + \frac{k^4}{3} - \frac{k^4}{4} + \frac{d^2 k l}{4} + \frac{d^2 l^2}{8} \right) \\
 &= \frac{\pi}{24V} (2D^2 k^2 + 2k^4 + 6d^2 k l + 3d^2 l^2) = \frac{2D^2 k^2 + 2k^4 + 3d^2 l(2k+l)}{3D^2 k + 4k^3 + 6d^2 l} \\
 &\approx 42\text{mm}.
 \end{aligned}$$

(Bemerkung: Bedenken Sie, dass die Angabe von mehr Nachkommastellen (etwa 42.1166 mm) hier nicht sinnvoll ist, denn die Grössen d , D und l sind auch nicht genauer als mit zwei Dezimalstellen angegeben.)

- b) Die Kurve $z = ax^2$ wird um die z -Achse gedreht. Für den Radius gilt dann $r^2 = x^2 + y^2$ und für die Höhe $z = ar^2$.

Schnittfläche bei z : $F(z) = \pi r^2 = \pi \frac{z}{a}$

Volumenelement bei z : $dV = F(z)dz = \pi \frac{z}{a} dz$

Der Schwerpunkt liegt auf der z -Achse mit Höhe h .

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} z dV, \quad \text{wobei } V = \int_0^{aR^2} dV \\
 &= \frac{1}{V} \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z^2 dz = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} z^3 \Big|_0^{aR^2} = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3a} a^3 R^6 = \frac{1}{V} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 \\
 V &= \int_0^{aR^2} dV = \int_0^{aR^2} \frac{\pi}{a} z dz = \frac{\pi}{2a} z^2 \Big|_0^{aR^2} = \frac{\pi}{2} a R^4 \\
 \Rightarrow h &= \frac{2}{\pi} a^{-1} R^{-4} \frac{\pi}{3} a^2 R^6 = \frac{2}{3} a R^2 = \frac{2}{3} H
 \end{aligned}$$

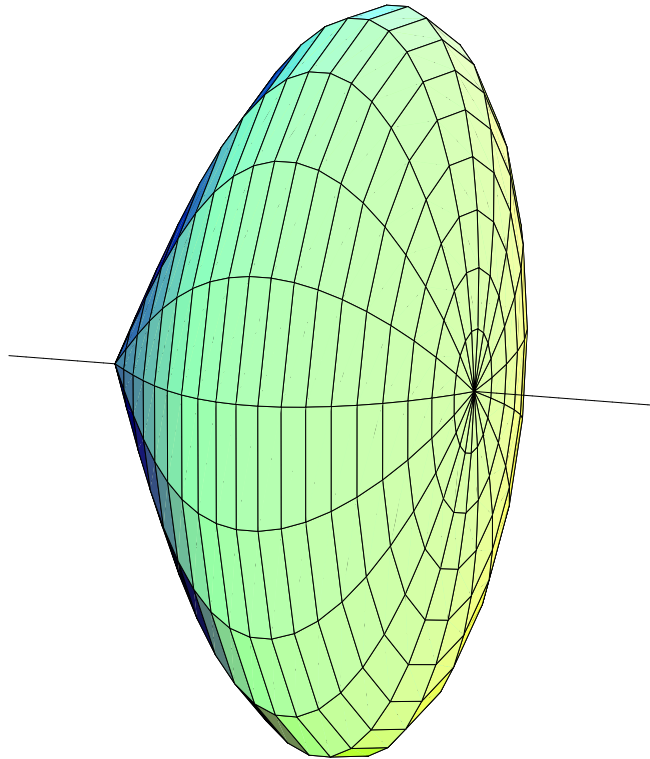
Bitte wenden!

6. a) Eine dünne homogene Quadratplatte (Länge der Quadratseite s , Masse pro Flächeneinheit σ) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Diagonale. Wie gross ist die kinetische Energie der Platte?

- b) Das Flächenstück zwischen der x -Achse und dem durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin(2t) \end{aligned} \quad \left(\text{für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

gegebenen Kurvenbogen wird um die x -Achse rotiert. Dadurch entsteht ein zwiebelartiger, homogener Körper mit homogener Dichte $\rho = 1$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse.



Lösung:

- a) Für die in der Zeichnung (siehe nächste Seite) oben rechts liegende Kante der Platte gilt die Gleichung $y = \frac{1}{\sqrt{2}} s - x$. In einem Streifen der Breite dx liegt also die kleine Masse

$$dm = 2y\sigma dx = 2\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} s - x \right) dx.$$

Daraus erhält man als Anteil der kinetischen Energie

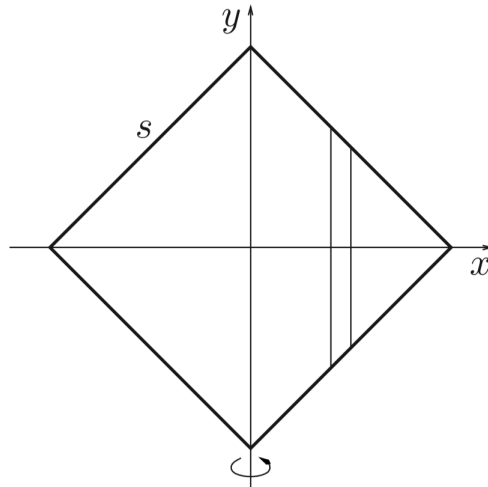
$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 dm = \sigma \omega^2 x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} s - x \right) dx.$$

Die gesamte kinetische Energie ist folglich

$$T = 2 \int_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} \sigma \omega^2 x^2 \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - x \right) dx = 2\sigma \omega^2 \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{24} \sigma \omega^2 s^4.$$

Siehe nächstes Blatt!

Den Faktor 2 benötigen wir, um auch die linke Hälfte der Platte zu berücksichtigen.



b) Wir bestimmen zuerst eine explizite Darstellung der Kurve. Es ist

$$y = \sin(2t) = 2 \sin t \cos t = 2x \sqrt{1-x^2}$$

(ein Stück einer Lemniskate bzw. Lissajous-Figur). Das Trägheitsmoment berechnet sich dann gemäss Buch, Kapitel III.12, wie folgt:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \pi \int_0^1 (2x \sqrt{1-x^2})^4 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 16x^4(1-x^2)^2 dx \\ &= 8\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^6 + x^8) dx = 8\pi \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \right]_0^1 \\ &= 8\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{64\pi}{315}. \end{aligned}$$

Alternative: Das Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe mit Radius r ist $\frac{1}{2}\pi r^4$. Zerschneiden wir die Zwiebel in solche Scheiben vom Radius $y(t)$ und Dicke $dx = \dot{x}(t)dt$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi/2} y(t)^4 |\dot{x}(t)| dt = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^4(2t)}_{= 16 \cos^4 t \sin^4 t} \sin t dt \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 t (1 - \cos^2 t)^2 \sin t dt \\ &\stackrel{\substack{u = \cos t \\ du = -\sin t dt}}{=} 8\pi \int_1^0 u^4 (1 - u^2)^2 (-1) du = 8\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{64\pi}{315}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

7. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale, sofern sie existieren.

a) $\int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}} dx;$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+x^3} dx;$ *Hinweis: Partialbruchzerlegung.*

c) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}};$

d) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$

e) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2};$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx,$ wobei $\lambda > 0.$

g) Finden Sie den Wert der Konstante $K,$ für welchen das Integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{K}{x+2} \right) dx$$

konvergiert und berechnen Sie in diesem Fall das Integral.

Hinweis: Benützen Sie die Identität $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

Lösung:

a) Wir können das Integral direkt berechnen und betrachten danach den durch die Schranken gegebenen Grenzwert:

$$\begin{aligned} \int_0^8 (8-x)^{-\frac{1}{3}} dx &= \lim_{\xi \rightarrow 8} \left[-\frac{3}{2} (8-x)^{\frac{2}{3}} \right]_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 8} -\frac{3}{2} \left((8-\xi)^{\frac{2}{3}} - 8^{\frac{2}{3}} \right) \\ &= -\frac{3}{2} (0 - 4) = 6. \end{aligned}$$

b) Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch. Der Nenner faktorisiert sich zu $x(x^2+1),$ wobei der Faktor x^2+1 keine reellen Nullstellen besitzt. Der korrekte Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet daher

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $x(x^2+1),$ so ergibt sich

$$1 = A(x^2+1) + (B+Cx)x,$$

ein kurzer Koeffizientenvergleich ergibt also $A = 1, B = 0, C = -1$ und damit

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \frac{1}{x+x^3} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x} dx - \int_1^\infty \frac{x}{x^2+1} dx \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right]_1^\xi \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} \right| - \left(\ln(1) - \frac{1}{2} \ln(2) \right) \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\xi^2}}} \right) + \frac{1}{2} \ln(2) \\
 &= \ln(1) + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \ln(2).
 \end{aligned}$$

c) Wir substituieren $u = x^2$, so dass $du = 2x dx$ und

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi^2} \frac{du}{2\sqrt{1+u^2}} \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arsinh} u \right]_{u=0}^{u=\xi^2} = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{arsinh} \xi^2.
 \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{arsinh} \xi^2 = \infty$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

d) Das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_2^\xi \frac{\frac{1}{x} dx}{\ln x} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\ln(|\ln x|) \right]_{x=2}^{x=\xi} \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\ln(\ln \xi) - \ln(\ln 2))
 \end{aligned}$$

existiert nicht, denn

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln(\ln \xi) = \infty.$$

e) Die Substitution $u = \ln x$ ergibt $du = \frac{dx}{x}$, also

$$\begin{aligned}
 \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_2^\xi \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln \xi} \frac{du}{u^2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{u=\ln 2}^{u=\ln \xi} \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln \xi} + \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2}.
 \end{aligned}$$

f) Es ist

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx &= \frac{1}{\lambda^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\lambda} \int \frac{1}{1 + u^2} du \\
 &= \frac{1}{\lambda} \arctan u + C = \frac{1}{\lambda} \arctan \left(\frac{x}{\lambda} \right) + C,
 \end{aligned}$$

in (*) haben wir dabei $u = \frac{x}{\lambda}$ substituiert, wobei $dx = \lambda du$. Bekannterweise gilt für die Arkustangens-Funktion

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \arctan \xi = \frac{\pi}{2} \text{ und } \arctan(-\xi) = -\arctan \xi,$$

Bitte wenden!

insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{1}{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{1}{\lambda} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\arctan\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right]_{-\xi}^{\xi} \\ &= \frac{1}{\lambda} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\arctan\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) - \arctan\left(\frac{-\xi}{\lambda}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\lambda} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

g) Zunächst folgt mit der Substitution $u = \frac{x}{2}$ mit $2 du = dx$, dass

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \operatorname{arsinh}(u) \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + D, \end{aligned}$$

wobei $D = C + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{K}{x + 2} \right) dx &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{K}{x + 2} \right) dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) - K \ln(|x + 2|) \right]_0^{\xi} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\ln(\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}) - K \ln(\xi + 2) + (K - 1) \ln 2 \right) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\ln\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{(\xi + 2)^K}\right) + (K - 1) \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Grenzwerts beachten wir $\xi + \sqrt{\xi^2 + 4} \sim 2\xi$ und $(\xi + 2)^K \sim \xi^K$ asymptotisch für $\xi \rightarrow \infty$; also

$$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{(\xi + 2)^K} \sim \frac{2\xi}{\xi^K} = 2\xi^{1-K} \quad (\xi \rightarrow \infty).$$

- Wenn $K < 1$ ist, dann gilt $\xi^{1-K} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \infty$ und damit auch $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{(\xi + 2)^K} = \infty$. Daher konvergiert das Integral in diesem Fall nicht.
- Wenn $K > 1$ ist, dann gilt $\xi^{1-K} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$ und damit auch $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{(\xi + 2)^K} = 0$ und somit ist

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{(\xi + 2)^K}\right) = -\infty.$$

Das Integral konvergiert ebenfalls nicht.

Siehe nächstes Blatt!

- Wenn $K = 1$ ist, dann ist

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 2} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\xi^2}}}{1 + \frac{2}{\xi}} = 2.$$

Deshalb konvergiert in diesem Fall das Integral und es gilt

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{K}{x + 2} \right) dx \stackrel{K=1}{=} \ln \left(\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 2} \right) = \ln 2.$$