Lösung - Serie 7

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt ...

√ (a) $e^{-1/x} = o(x^n)$ für $x \to 0^+$

(b) $e^{1/x} = o(x^{-n})$ für $x \to 0^+$

√ (c) $x^{-n} = o(e^{1/x})$ für $x \to 0^+$

√ (d) $e^{\sqrt{\ln x}} = o\left(x^{1/3}\right)$ für $x \to +\infty$

(e) $\sin^2(x)\ln^3(x) = o\left(\ln^3(x)\right)$ für $x \to +\infty$

Die richtigen Antworten sind (a), (c) und (d).

Für (a) betrachte man, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $y > 0$ ist $e^y > \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$. Insbesondere, für alle $x > 0$ haben wir auch $e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{(n+1)!\cdot x^{n+1}}$ (Setze $y = \frac{1}{x}$). Daraus folgt,

$$\frac{e^{-1/x}}{x^n} < (n+1)! \cdot x, \quad \text{für } x > 0.$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich, dass $0 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} \leq (n+1)! \lim_{x\to 0^+} x = 0$.

Für (c), mit dem Variablentransformation $x \mapsto \frac{1}{x}$ wird die Aussage äquivalent zu $x^n = o(e^x)$ für $x \to \infty$. Dies wurde in der Vorlesung bewiesen.

Für (d) gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{\ln x}-(1/3)\ln(x)} = 0$, da $\sqrt{\ln(x)} = o(\ln(x))$ für $x \to \infty$.

(b) ist falsch, denn es gilt $e^{1/x} > \frac{1}{n!\cdot x^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$. Somit ist, wenn er existiert,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x^{-n}} \geq \frac{1}{n!}.$$

(e) ist falsch, denn $\frac{\sin^2(x)\ln^3(x)}{\ln^3(x)} = \sin^2(x)$ und folglich konvergiert der Bruch nicht.

2. Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2x) + 2\sin(x)$.

(a) 2.61

(b) 1.73

√ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$

$$= 2(\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \ \text{ und } \ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

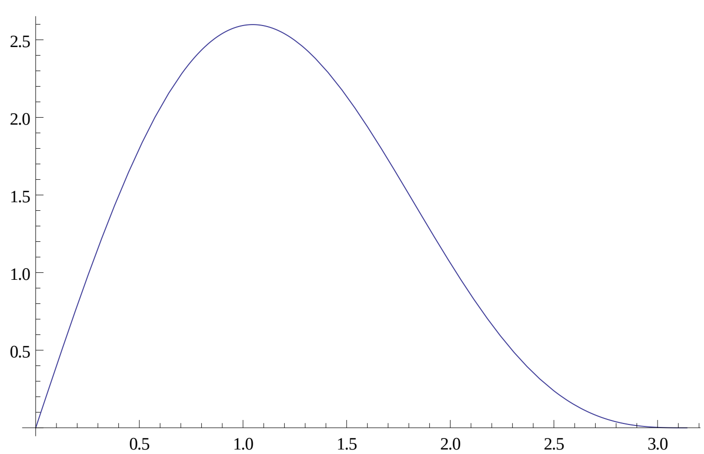
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0,\pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\ f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



Siehe nächstes Blatt!

3. Sei

$$f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

√ (a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

√ (c) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

√ (d) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$f'(x) > 0 \ \text{ für } \ x \in (0,1)$$
$$f'(x) < 0 \ \text{ für } \ x \in (1,4)$$
$$f'(x) > 0 \ \text{ für } \ x \in (4,6),$$

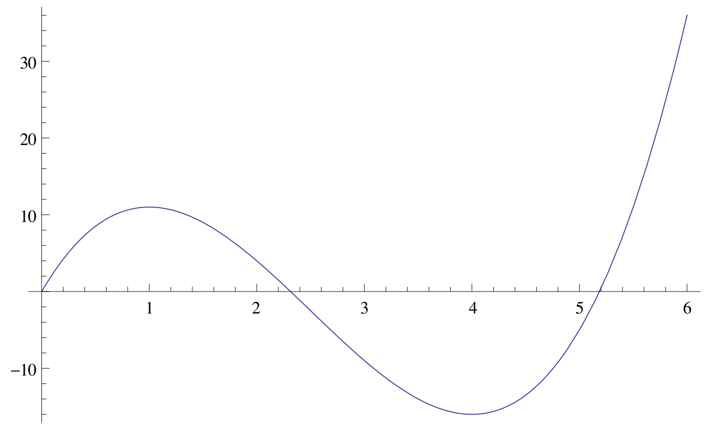
ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

$$f(0) = 0, \ f(1) = 11, \ f(4) = -16, \ f(6) = 36.$$

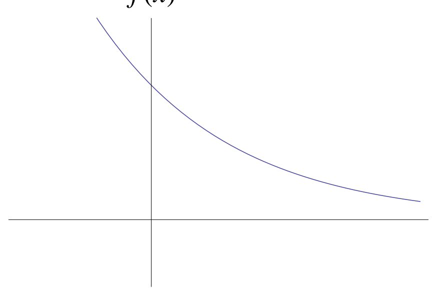
Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;
- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



4. Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



(a) Die erste Ableitung f' ist positiv.

√ (b) Die erste Ableitung f' ist negativ

(c) Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

√ (d) Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine konvexe Kurve, damit muss $f'' > 0$ sein.

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Bestimmen Sie die Werte der Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx$$

im Punkt $(1, 2)$ ein globales Maximum hat.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $a < b$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Maximum der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

auf dem Intervall $[a, b]$.

Lösung:

a) Es muss folgendes gelten:

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b = 2 \\ f'(1) &= 2a + b = 0 \\ f''(1) &= 2a < 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $a = -2$ (< 0) und $b = 4$. Somit hat $f(x) = -2x^2 + 4$ ein globales Maximum in $(1, 2)$.

b) Das Maximum auf dem Intervall $[a, b]$ wird entweder am Rand angenommen, also in a oder b, oder in einem kritischen Punkt (d.h. $f'(x) = 0$). Wir suchen also zuerst lokale Maxima der Funktion f auf der ganzen reellen Achse $\mathbb{R}$.

Man hat

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2),$$

also sind $x_0 = 1, x_1 = 2$ die kritischen Punkte. Weiter ist

$$f''(x) = 12x - 18,$$

also hat f in x_0 ein lokales Maximum und in x_1 ein lokales Minimum. Ausserdem sieht man, dass f auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ monoton wachsend, auf $(1, 2)$ monoton fallend, und auf $(1, \infty)$ monoton wachsend ist.

Der Wert von f an der Stelle x_0 ist $f(x_0) = f(1) = 0$. Man sucht weitere Punkte x mit $f(x) = f(x_0) = 0$. Durch Polynomdivision kriegt man

$$f(x) = (x - 1)(2x^2 - 7x + 5) = 2(x - 1)^2(x - \frac{5}{2}),$$

also ist $\frac{5}{2}$ die einzige andere Nullstelle von f.

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $b \leq 1$, dann gilt $\max = f(b)$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a \leq 1$, in diesem Fall $\max = f(1)$
- $1 < b \leq \frac{5}{2}$ und $a > 1$, hier gilt $\max = \max(f(a), f(b))$
- $b > \frac{5}{2}$, dann gilt $\max = f(b)$

6. Die Hyperbolische Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind wie folgt definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

Bitte wenden!

$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Beweisen Sie folgende Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

b) $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $x \in \mathbb{R}$, wo sie sinnvoll sind:

c) $2\cosh^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cosh(x) + 1.$

d) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

e) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

f) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Lösung:

a) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$, und analog $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$, also folgt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(2 + 2) = 1$.

b) $\sinh x \cdot \cosh y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)})$, also folgt $\sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}) = \sinh(x + y)$.

c) $2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{2}\right)^2 = 2\frac{e^x+2+e^{-x}}{4} = \cosh x + 1.$

d) Setze $y := \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq 1$. Dann gilt $2y - e^x = \frac{1}{e^x}$ und damit

$$2ye^x - (e^x)^2 = 1,$$

also $(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$. Es folgt $e^x = \frac{1}{2}(2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}) = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, es gibt hier zwei Äste der Umkehrfunktion (da der $\cosh$ im Unterschied zum $\sinh$ nicht injektiv ist). Wir verwenden den Teil rechts im Bild, d. h. bei $x > 0$ und dort gilt $e^x > 1$, d.h. wir verwenden die Lösung mit dem Plus. Folglich erhalten wir $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, was die Umkehrfunktion des Cosinus hyperbolicus darstellt. Für den Teil $x < 0$ hätten wir die Lösung mit dem Minus bekommen.

e) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ und $\ln' x = \frac{1}{x}$. Also gilt gemäss der Kettenregel

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}' x &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

f) Ganz analog wie für arsinh'.

7. Ordnen Sie die folgenden sechs Funktionen nach ihren Grössenordnungen, wenn $x \to +\infty$ strebt.

Siehe nächstes Blatt!

a) $\ln\big(\ln(x^2)\big)$ b) $\ln\big(e^x - x\big)$ c) x^2

d) $x^{1/5}$ e) $\ln\big(10\,x^{1/2}\big)$ f) e^{3x}

Lösung:

Wir verwenden

$$\ln x = o(x^k) \quad \text{für } x \to +\infty, \quad \text{falls } k > 0 \tag{1}$$

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \to +\infty, \tag{2}$$

um die folgenden Grenzwerte zu berechnen:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\ln x^2}{\ln 10x^{1/2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln\ln x}{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln 2 + \ln y}{\ln 10 + \frac{1}{2} y} \overset{(1)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(10x^{1/2})}{x^{1/5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 10 + \frac{1}{2}\ln x}{x^{1/5}} \overset{(1)}{=} 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{5}}}{\ln(e^x - x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{\frac{e^x-1}{e^x-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5}\dfrac{e^x - x}{x^{\frac{4}{5}}(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{5}\dfrac{1-\frac{x}{e^x}}{x^{\frac{4}{5}}(1-\frac{1}{e^x})} = 0.$
- $0 \overset{(2)}{\leq} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x - x)}{x^2} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{3x}} \overset{(2)}{=} 0$

Zusammengefasst hat man also

a) $\ll$ e) $\ll$ d) $\ll$ b) $\ll$ c) $\ll$ f)

8. Für welche der untenstehenden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $g(x) = O(e^x)$ mit $x \to +\infty$ und für welche gilt $e^x = O(g(x))$ mit $x \to +\infty$?

(*Zur Erinnerung:* Es gilt $g(x) = O(f(x))$ mit $x \to +\infty$ falls $\lim\limits_{x\to+\infty} |\frac{g(x)}{f(x)}| \leq A$, wobei $A \in [0, +\infty)$ eine nicht-negative reelle Zahl ist.)

a) $g(x) = e^{x+4}$;

b) $g(x) = e^x + 17x^{17}$;

c) $g(x) = e^{x^2}$;

d) $g(x) = 200e^{\frac{1}{x^3}}$;

e) $g(x) = x^x$.

Lösung:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+4}}{e^x} = e^4 \text{ und } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{x+4}} = e^{-4},$$

also $g(x) = O(e^x)$ und $e^x = O(g(x))$.

Bitte wenden!

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+17x^{17}}{e^x}=1+0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+17x^{17}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{17x^{17}}{e^x}}=1,$$

also $g(x)=O(e^x)$ und $e^x=O(g(x))$.

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2-x}=+\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2}=0,$$

also $e^x=O(g(x))$. Wir haben benutzt, dass $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty}x-x^2=-\infty$.

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{200e^{\frac{1}{x^3}}}{e^x}=0 \text{ und } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{200e^{\frac{1}{x^3}}}=+\infty,$$

also $g(x)=O(e^x)$.

e) Beachte $x^x=e^{x\ln(x)}$ und somit

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(x)}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x(\ln(x)-1)}=+\infty \text{ und } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x\ln(x)}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x(1-\ln(x))}=0$$

also $e^x=O(x^x)$.