Serie 10

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 5.12.2018 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 5.12.2018* in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(b) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$

2. Welche der folgenden Subtitutionen kann verwendet werden, um das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ als $\displaystyle\int \frac{2du}{3+u^2}$ auszudrücken?

(a) $u^2 = 2\cos(x) + 1.$

(b) $u = 2 + \cos(x).$

(c) $u = \tan(x/2).$

(d) $u = 4\tan(x).$

3. Es sei $u = \sin(x)$. Durch Substitution folgt

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = \int_{u(0)}^{u(\pi)} \frac{xu}{du/dx}du = \int_0^0 \frac{xu}{du/dx}du = 0,$$

da $\displaystyle\int_a^a g(t)dt = 0$ für alle Funktionen g auf $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Allerdings folgt durch Verwendung der partiellen Integration, dass $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\pi} = \pi \neq 0$ gilt. Welcher der folgenden Sätze beschreibt, worin der Fehler unserer Überlegungen liegt?

(a) Die Funktion $\sin(x) - x\cos(x)$ ist keine Stammfunktion von $x\sin(x)$.

(b) Die Grenzen der Integration sind falsch.

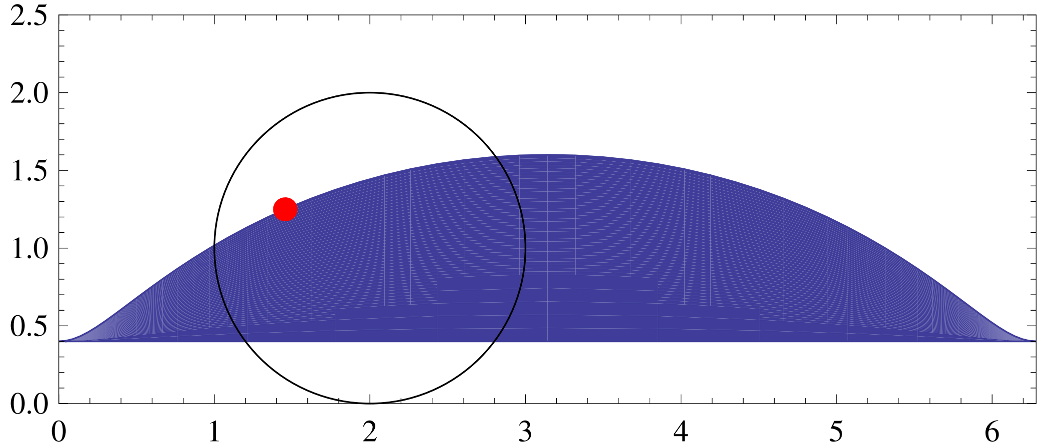
(c) $\int_a^a g(t)dt = 0$ stimmt nicht für alle Funktionen g.

(d) Die Substitution u = sin(x) ist mit diesen Grenzen nicht erlaubt.

4. Die verkürzte Zykloide ist die Kurve die von einem Punkt auf einem rollenden Rad beschrieben wird. Eine Parameterdarstellung ist

$$\begin{cases} x(t) &= at - b\sin t \\ y(t) &= a - b\cos t, \end{cases}$$

mit $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der gefärbten Fläche.



(a) $(2a^2 + b^2 - 2ab)\pi$.

(b) $(2a^2 - 2a + b^2 + 2b)\pi$.

(c) $(2a^2 + b^2)\pi$.

(d) $(b^2 + 2ab)\pi$.

Bitte wenden!

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ *(Hinweis: Substituiere* $u^2 = e^x - 1$*)*;

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3}$ *(Hinweis: Substituiere* $u = x^2$*)*;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_3^4 x^3 \cos(x^2) dx$;

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin\left(\sqrt{1 - 4x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}\,dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2} dx$ *(Hinweis: Das Polynom* $x^2 + 1$ *ist ein Faktor des Nenners.)*;

h) $\displaystyle\int \frac{x + 2}{x^4 + 2x^2} dx.$

6. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0$$

zu finden.

a) Berechnen Sie die ersten zwei Integrale I_0 und I_1.

b) Finden Sie eine Rekursionsformel für I_n. Benutzen Sie hierfür partielle Integration.

c) Verwenden Sie die gefundene Rekursionsformel von I_n um I_5 zu berechnen.

d)* Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Hinweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Benutzen Sie unter anderem

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(x)^n \mathrm{d}x + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(x)^n \mathrm{d}x$$

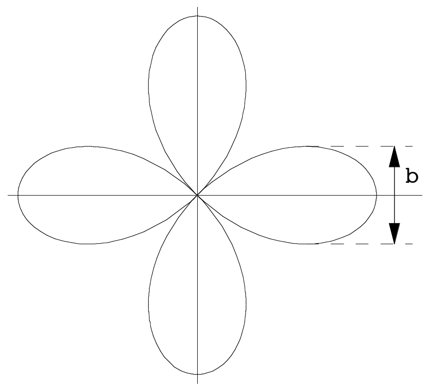
und $\ln(x) < 1$ für alle $x \in [1, e)$ um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq \varepsilon$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Durch

$$\rho(\varphi) = a\,|\cos(2\varphi)|$$

mit $a > 0$ wird in Polarkoordinaten der Rand eines Kleeblattes parametrisiert.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kleeblattes.

b) Bestimmen Sie die Breite b des Kleeblattes.

8. Berechnen Sie den Flächeninhalt, den die folgenden Kurven im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ einschliessen.

a) $\rho(\varphi) = \sqrt{\varphi}$

b) $\rho(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$

c) $\rho(\varphi) = |\sin(\varphi)|$