Serie 3

Die ersten Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben (MC), die online gelöst werden. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 17.10.2018 um 08:00 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 17.10.2018* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2018/hs/401-0261-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = \ln(x^2+1)$, wobei der Logarithmus $\ln$ zur Basis e ist. Welche Gleichung beschreibt die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$?

(a) Die Umkehrfunktion existiert nicht.

(b) $f^{-1}(x) = \ln(x^2-1)$

(c) $f^{-1}(x) = e^{x^2+1}$

(d) $f^{-1}(x) = e^{x-1}$

(e) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}$

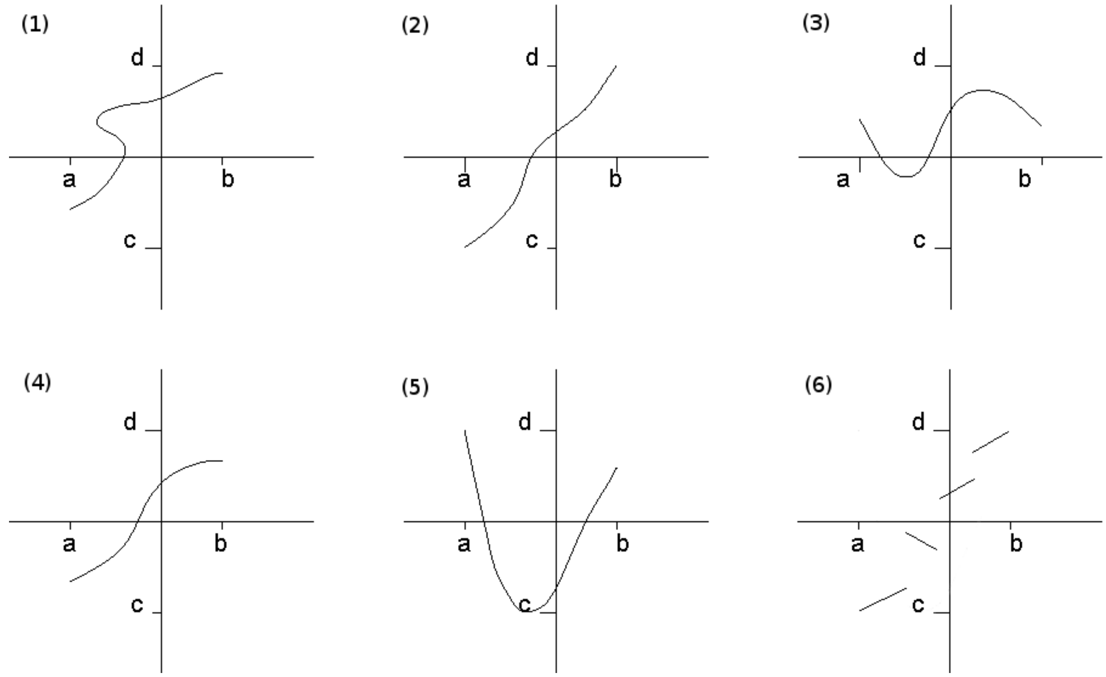
2. Es sei $f(x) = \cos(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ ist injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D(f)\}$, ist gleich $[0,1]$.

(c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}]$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von der Funktion $f\colon [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/\sqrt{2}] \to \left[0, \sqrt{1/2}\right],\ x \mapsto f(x)$.

3. Welche der folgenden Bilder beschreiben den Graph einer injektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?



(a) (1)

(b) (2)

(c) (3)

(d) (4)

(e) (5)

(f) (6)

Siehe nächstes Blatt!

4. Eine Funktion g heisst *Asymptote* einer Funktion f für $x \to \infty$, falls $\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$ gilt. Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $g(x) = e^x$

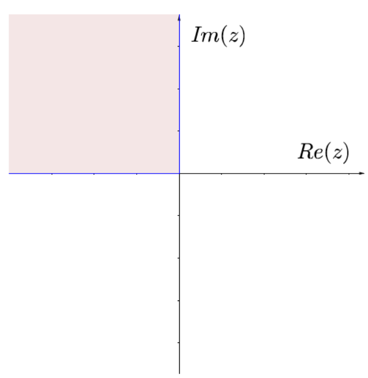
(b) $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

(c) $g(x) = e^x - 1$

(d) $g(x) = e^x - e^{-x}$

(e) $g(x) = e^{-x}$

5. Betrachten Sie das Gebiet definiert durch den roten Teil des Bildes (ohne die blaue Linien)



Welche Menge wird von diesem Gebiet dargestellt?

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) < 0\}$

6. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto 2x - 6 \\ f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty), & x \mapsto |x| \\ f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ f_4 \colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \frac{x+1}{f_1(x)}. \end{array}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : W(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Hinweis: Sie müssen $W(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ hier nicht explizit berechnen.

7. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f_i je ein möglichst grosses Intervall I, so dass $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist und $-3\pi \in I$. Was ist das Bild von I unter f_i?

a) $f_1(x) = x^4 + x^2$

b) $f_2(x) = e^x - 5$

c) $f_3(x) = \tan(x)$

8. Bestimmen Sie bei jeder der folgenden Funktionen, welche für alle reellen Zahlen $t > 0$ definiert sind, jeweils eine Asymptote der Form $at + b$ für $t \to +\infty$:

a) $f(t) = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$;

b) $g(t) = \sqrt{4t^2 + 3}$;

c) $h(t) = 3t + \cos(1/t)$;

d) $i(t) = \ln(1 + e^t)$.

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen und die dazugehörigen Asymptoten.

9. Berechnen Sie jeweils die Summe $z + w$, das Produkt $z \cdot w$ und den Quotienten z/w in kartesischer Form.

a) $z = 1 + i$, $w = i$

b) $z = -4 - 16i$, $w = -5 - 10i$

Zeichnen Sie in der komplexen Ebene folgende Mengen.

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > |z|^2\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)\}$