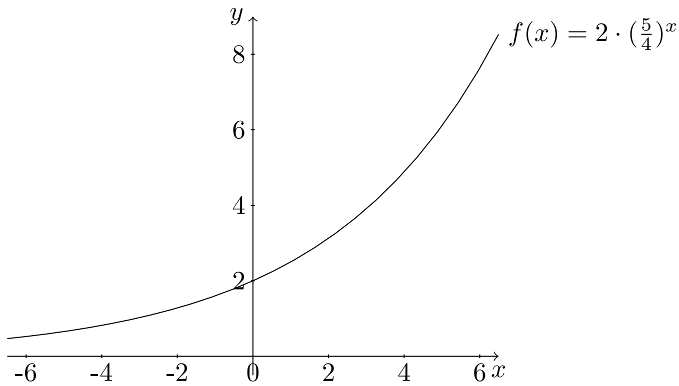
Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

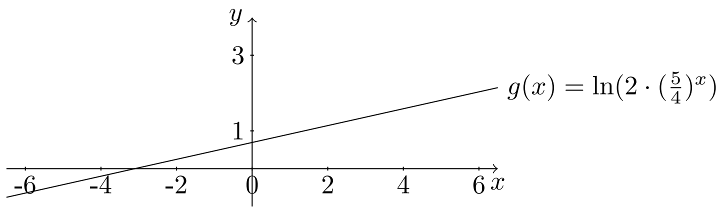
Lösungsvorschläge zur Serie 1

Aufgabe 1

(a)



(b)



Der Graph der Funktion $g(x)$ ist eine Gerade.

(c) Wir formen die Funktionsvorschrift von $g(x)$ schrittweise mit den Logarithmengesetzen um und erhalten

$$g(x) = \ln(f(x)) = \ln(a \cdot b^x) = \ln(a) + \ln(b^x) = \ln(a) + x\ln(b).$$

Das heisst die Funktion $g(x)$ hat die Form $g(x) = c+mx$ mit $c = \ln(a)$ und $m = \ln(b)$. Somit beschreibt $g(x)$ eine Gerade mit Steigung $\ln(b)$ und y-Achsenabschnitt $\ln(a)$. (In der obigen Aufgabe ist die exakte Steigung also $\ln(b) = \ln(1.25) \approx 0.22$ und der y-Achsenabschnitt $\ln(a) = \ln(2) \approx 0.69$, was mit dem Graphen übereinstimmt.)

(d) Aus der Aufgabe (c) wissen wir, dass $g(x)$ eine Gerade mit Geradensteigung $\ln(b)$ ist. Somit ist die Geradensteigung positiv falls $\ln(b) > 0$, also falls $b > 1$, und sie ist negativ falls $\ln(b) < 0$, also falls $b < 1$.

(e) Die Logarithmengesetze gelten für alle Logarithmen zu verschiedenen Basen. Wir erhalten also wieder eine Gerade für $z(x)$, wobei die Steigung und der y-Achsenabschnitt angepasst werden. So folgt z.B. für den Logarithmus zur Basis 10 wie in Aufgabe (c)

$$g(x) = \log_{10}(f(x)) = \log_{10}(a \cdot b^x) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b^x) = \log_{10}(a) + x\log_{10}(b)$$

und somit ist $g(x)$ nun eine Gerade mit Steigung $\log_{10}(b)$ und y-Achsenabschnitt $\log_{10}(a)$.

Aufgabe 2

(a) Die Funktion $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, da $1 + t^2 \neq 0$. Also $D = \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$f(-t) = \frac{1}{1 + (-t)^2} = \frac{1}{1 + t^2} = f(t),$$

d.h. f ist eine gerade Funktion.

(b) Die Funktion $f(t) = \frac{t}{1-t^3}$ ist nicht definiert, falls der Nenner Null ist. Das ist für $t = 1$ der Fall. Der Definitionsbereich ist also ganz $\mathbb{R}$ ohne 1, dies schreibt man mathematisch wie folgt: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Weiter gilt z.B.

$$f(2) = -\frac{2}{7} \qquad \text{sowie} \qquad f(-2) = -\frac{2}{9},$$

d.h. f ist weder gerade noch ungerade.

(c) Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ ohne 0, da dort f nicht definiert ist. Mathematisch geschrieben: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für alle $t \in D$ ist

$$f(-t) = \frac{\sin(17 \cdot (-t))}{(-t)^2} = \frac{\sin(-17t)}{t^2} = -\frac{\sin(17t)}{t^2} = -f(t),$$

d.h. f ist ungerade.

(d) Der Definitionsbereich von f ist gleich dem Definitionsbereich vom Tangens $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, also $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen vom Cosinus. Das bedeutet

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Für $t \in D$ gilt

$$f(-t) = -t\tan(-t) = -t\frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = -t\frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = f(t),$$

d.h. f ist gerade.

(e) Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$. Es gilt

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2^{\sin(\frac{\pi}{2})} = 2 \qquad \text{sowie} \qquad f(-\frac{\pi}{2}) = 2^{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2},$$

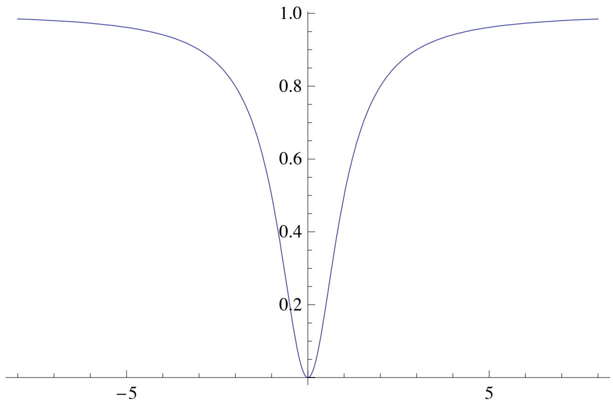
d.h. f ist weder gerade noch ungerade.

Aufgabe 3

(a) Die Funktion f ist gerade, denn für alle $t \in \mathbb{R} = D$ gilt

$$f(-t) = \frac{(-t)^2}{1+(-t)^2} = \frac{t^2}{1+t^2} = f(t).$$

(b)



(c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq t^2 < 1 + t^2$ und somit $0 \leq f(t) < 1$. Alle möglichen Funktionswerte von f (mathematisch geschrieben die Menge $W = \{f(t) \,|\, t \in D\}$) sind also im Intervall $[0, 1)$ enthalten. Für den Wertebereich W gilt somit auf jeden Fall $W \subseteq [0, 1)$.
Es gilt auch $W \supseteq [0, 1)$, da sich $f(t)$ für $t \to \infty$ dem Wert 1 annähert. Das bedeutet, dass es man für jede Zahl $y_0 \in [0, 1)$ ein $t_0 \in D = \mathbb{R}$ finden kann, für welches $f(t_0) = y_0$ gilt. Der Wertebereich von f ist also $W = [0, 1)$.

(d) Sei $t_2 > t_1 \geq 0$. Dann ist $t_2^2 > t_1^2$ und es folgt

$$f(t_2) - f(t_1) = \frac{t_2^2}{1+t_2^2} - \frac{t_1^2}{1+t_1^2} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} > 0,$$

da Zähler und Nenner beide positiv sind. Somit ist $f(t_2) > f(t_1)$. Die Funktion f ist daher im Bereich $t \geq 0$ monoton steigend. Da f nach Teilaufgabe (a) gerade ist, folgt hieraus, dass die Funktion im Bereich $t \leq 0$ monoton fallend ist. (Sei $t_2 < t_1 \leq 0$. Dann ist $-t_2 > -t_1 \geq 0$ und somit $f(-t_2) - f(-t_1) > 0$ also $f(t_2) - f(t_1) > 0$ da gerade.)

Aufgabe 4

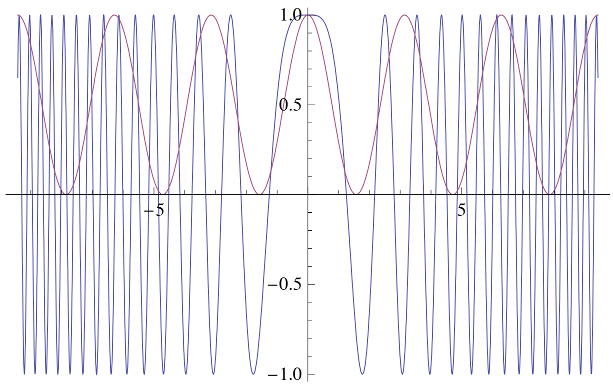
(a) Wir suchen das kleinste p mit $f(x) = f(x+p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir fordern also $\cos(4\pi x) \overset{!}{=} \cos(4\pi(x+p)) = \cos(4\pi x + 4\pi p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $4\pi p = 2\pi$ ist, da der Kosinus die primitive Periode 2π besitzt und somit $\cos(4\pi x + 2\pi) = \cos(4\pi x)$ ist. Die primitive Periode von f ist also $p = \frac{1}{2}$.

(b) Gesucht ist das kleinste p mit $\tan(\frac{\pi}{4}x) \overset{!}{=} \tan(\frac{\pi}{4}(x+p)) = \tan(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $\frac{\pi}{4}p = \pi$ ist, da der Tangens die primitive Periode π besitzt. Die primitive Periode von f ist also $p = 4$.

(c) Gesucht ist das kleinste p mit $g(314x) \overset{!}{=} g(314(x+p)) = g(314x + 314p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Gleichung ist erfüllt sobald $314p = 1$ ist, da die Funktion g nach Aufgabenstellung die primitive Periode 1 besitzt. Die primitive Periode von f ist also $p = \frac{1}{314}$.

Aufgabe 5

(a) In blau ist die Funktion g_1 gezeichnet und in rot die Funktion g_2.



(b) Da die Kosinusfunktion den Wertebereich $[-1, 1] = \{\cos(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ hat, erhalten wir für die Wertebereiche von g_1 bzw. g_2 die Intervalle $W_1 = [-1, 1]$ bzw. $W_2 = [0, 1]$.

(c) Beide Funktionen sind gerade, denn für alle $t \in \mathbb{R} = D$ ist

$$g_1(-t) = \cos\left((-t)^2\right) = \cos\left(t^2\right) = g_1(t)$$
$$g_2(-t) = (\cos(-t))^2 = (\cos t)^2 = g_2(t).$$

(d) Die Funktion g_1 ist offenbar nicht periodisch. Es ist nicht möglich ein $p \in \mathbb{R}$ zu finden, sodass $g_1(t) = g_1(t+p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion oszilliert immer stärker hin und her.
Die Funktion g_2 ist hingegen periodisch: Wir fordern $g_2(t) \overset{!}{=} g_2(t+p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $(\cos(t))^2 \overset{!}{=} (\cos(t+p))^2$. Nun gilt mit den Additionstheoremen $(\cos(t+p))^2 = \left(\cos(t)\cos(p) - \sin(t)\sin(p)\right)^2$ und dieser Ausdruck ist gleich $(\cos(t))^2$ sobald $\cos(p) = \pm 1$ und $\sin(p) = 0$ ist. Somit muss p ein Vielfaches von π sein. Die kleinste Periodenlänge ist somit π.