Lösungsvorschläge zur Serie 10

Aufgabe 1

(a) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\cos^3(x)\sin(x)$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = \cos(x)$. Somit ist $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$ also $dx = -\frac{1}{\sin(x)}\,du$. Mit dieser Substitution finden wir

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\sin(x)\,dx &= \int u^3 \sin(x)\frac{-1}{\sin(x)}\,du = -\int u^3\,du = -\frac{u^4}{4} + C \\ &= -\frac{\cos^4(x)}{4} + C \qquad \text{mit Rücksubstitution} \\ &= F(x) + C.\end{aligned}$$

Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,dx = F(2\pi) - F(\pi) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = \pi$ und $x = 2\pi$ werden unter der Substitution $u = \cos(x)$ zu den Grenzen $u = -1$ und $u = 1$. Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_\pi^{2\pi} \cos^3(x)\sin(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u^3 \sin(x)\frac{-1}{\sin(x)}\,du = -\int_{-1}^{1} u^3\,du = -\frac{u^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

(b) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\frac{5+x}{5-x}$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = 5 - x$. Somit ist $\frac{du}{dx} = -1$ also $dx = -1\,du$. Mit dieser Substitution finden wir ($u = 5 - x \Leftrightarrow x = 5 - u$)

$$\begin{aligned}\int \frac{5+x}{5-x}\,dx &= \int \frac{10-u}{u}(-1)\,du = \int 1 - \frac{10}{u}\,du = u - 10\ln(|u|) + C \\ &= 5 - x - 10\ln(|5-x|) + C \qquad \text{mit Rücksubstitution} \\ &= F(x) + C.\end{aligned}$$

Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\,dx = F(1) - F(-1) = 4 - 10\ln(4) - 6 + 10\ln(6) = -2 + 10(\underbrace{\ln(6) - \ln(4)}_{=\ln(6/4)=\ln(3/2)}) = -2 + 10\ln(3/2).$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = -1$ und $x = 1$ werden unter der Substitution $u = 5-x$ zu den Grenzen $u = 6$ und $u = 4$ (in dieser Reihenfolge!!). Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x}\,dx = \int_{6}^{4} \frac{10-u}{u}(-1)\,du = -\int_{6}^{4} \frac{10-u}{u}\,du = \int_{4}^{6} \frac{10-u}{u}\,du = \int_{4}^{6} \frac{10}{u} - 1\,du$$
$$= \big(10\ln(|u|) - u\big)\Big|_{4}^{6} = -2 + 10\ln(3/2).$$

(c) Wir finden zuerst eine Stammfunktion von $\dfrac{2-x}{1+\sqrt{x}}$. Dazu verwenden wir die Substitution $u = 1 + \sqrt{x}$. Somit ist $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ also $dx = 2\sqrt{x}\,du$. Substituieren wir im Integral ist

$$\int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2-x}{u} 2\sqrt{x}\,du \overset{(*)}{=} \int \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du.$$

Im Schritt $(*)$ haben wir die übriggebliebenen x mit der gleichen Substitution ersetzt ($u = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x = (u-1)^2$). Die obige Stammfunktion können wir ausrechnen

$$\int \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du = 2\int \frac{2(u-1)-(u-1)^3}{u}\,du = 2\int \frac{2(u-1)-(u^3-3u^2+3u-1)}{u}\,du$$
$$= 2\int \frac{-u^3+3u^2-u-1}{u}\,du = 2\int (-u^2+3u-1-\frac{1}{u})\,du$$
$$= 2\Big(-\frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} - u - \ln(|u|)\Big) + C$$
$$= -\frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + 3(1+\sqrt{x})^2 - 2(1+\sqrt{x}) - 2\ln(|1+\sqrt{x}|) + C \qquad \text{mit Rücksubstitution}$$
$$= F(x) + C.$$

Das gesuchte bestimmte Integral ist also

$$\int_0^4 \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = F(4) - F(0) = \ldots = \frac{8}{3} - 2\ln(3).$$

Alternativ: Wir können direkt im bestimmten Integral substituieren und dabei auch die **Grenzen** anpassen. Die Grenzen $x = 0$ und $x = 4$ werden unter der Substitution $u = 1 + \sqrt{x}$ zu den Grenzen $u = 1$ und $u = 3$. Die Rechnung ist somit (keine Rücksubstitution nötig)

$$\int_0^4 \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^3 \frac{2-x}{u} 2\sqrt{x}\,du = \int_1^3 \frac{2-(u-1)^2}{u} 2(u-1)\,du$$
$$\overset{\text{wie oben}}{=} \ldots = 2\int_1^3 (-u^2+3u-1-\frac{1}{u})\,du = 2\Big(-\frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} - u - \ln(|u|)\Big)\Big|_1^3 = \ldots = \frac{8}{3} - 2\ln(3).$$

Aufgabe 2

(a) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor. Der Nenner $2x^2-2x+\frac{1}{2}$ hat eine doppelte Nullstelle $x=\frac{1}{2}$. Somit ist $2x^2-2x+\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2})^2$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{1-x}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}=\frac{1-x}{2(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{A}{x-\frac{1}{2}}+\frac{B}{(x-\frac{1}{2})^2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A,B\in\mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{1-x}{2(x-\frac{1}{2})^2}=\frac{A(x-\frac{1}{2})+B}{(x-\frac{1}{2})^2}\qquad\text{und somit}\qquad\frac{1-x}{2}=A(x-\tfrac{1}{2})+B.$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert $A=-\frac{1}{2}$ und $B=\frac{1}{4}$. Es folgt also

$$\frac{1-x}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist damit

$$\int\frac{1-x}{2x^2-2x+\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(|x-\tfrac{1}{2}|)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{2}\ln(|x-\tfrac{1}{2}|)-\frac{1}{4x-2}+C.$$

(b) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor. Der Nenner $Q(x)=x^2-2x+5$ hat keine Nullstellen. Wir wollen also die zu integrierende Funktion in die Form $\frac{A\cdot Q'(x)+B}{Q(x)}$ bringen, mit zu bestimmenden Koeffizienten $A,B\in\mathbb{R}$. Es ist $Q(x)=x^2-2x+5$ und $Q'(x)=2x-2$. Wir möchten also

$$\frac{x+1}{x^2-2x+5}=\frac{A\cdot Q'(x)+B}{Q(x)}=\frac{A(2x-2)+B}{x^2-2x+5}.$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert $A=\frac{1}{2}$ und $B=2$. Somit haben wir

$$\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2-2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx}_{=\int\frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx=\ln(|Q(x)|)+C}+2\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx.\qquad(*)$$

Es bleibt die Stammfunktion $\int\frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ zu finden. Dazu müssen wir den Nenner in der Form $(x+\beta)^2+\alpha^2$ schreiben. Gesucht ist also

$$x^2-2x+5=(x+\beta)^2+\alpha^2\quad\text{und somit}\quad x^2-2x+5=x^2+2\beta x+\beta^2+\alpha^2.$$

Koeffizientenvergleich liefert $\beta = -1$ und daraus $\alpha^2 = 4$, also $\alpha = 2$. Somit ist die fehlende Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

Insgesamt folgt somit eingesetzt in $(*)$, dass

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2 - 2x + 5|) \ + \ \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

(c) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 3. Wir gehen wie in der Vorlesung vor. Durch raten finden wir eine erste Nullstelle $x = 1$ des Nenners $x^3 + 2x^2 - x - 2$. Es gilt somit $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ für gewisse Zahlen a, b, c. Klammern wir aus, so sehen wir, dass $x^3 + 2x^2 - x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ gelten muss. Daraus folgt mit Koeffizientenvergleich zuerst $a = 1$ und daraus $b = 3$ und daraus $c = 2$. Somit ist

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 2).$$

Das Polynom zweiten Grades $x^2 + 3x + 2$ hat zwei Nullstellen $x = -1$ und $x = -2$. Somit ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1).$$

Anstatt auf der rechten Seite auszuklammern, können wir spezielle x-Werte einsetzen (diese Gleichung muss ja für alle x gelten). Setzen wir bsp. $x = 1$ ein, so folgt $4 = 6A$ und somit $A = \frac{2}{3}$. Setzen wir $x = -1$ ein, so folgt $4 = -2B$ und somit $B = -2$. Setzen wir $x = -2$ ein, so folgt $4 = 3C$ und somit $C = \frac{4}{3}$. Insgesamt folgt also

$$\frac{4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{-2}{x+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x+2}.$$

Dies setzt man nun in das Integral ein und findet

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\,dx &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\ln(|x-1|) - 2\ln(|x+1|) + \frac{4}{3}\ln(|x+2|) + C.\end{aligned}$$

(d) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 3. Der Zähler ist zwar nicht konstant, das Rezept für die Integration bleibt aber gleich wie in der Vorlesung erklärt. In 2c) haben wir schon gesehen, dass für den Nenner gilt

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2).$$

Somit ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$x^2+1 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1).$$

Anstatt auf der rechten Seite auszuklammern, können wir wieder spezielle x-Werte einsetzen (diese Gleichung muss ja für alle x gelten). Setzen wir $x=1$ ein, so folgt $2 = 6A$ und somit $A = \frac{1}{3}$. Setzen wir $x = -1$ ein, so folgt $2 = -2B$ und somit $B = -1$. Setzen wir $x = -2$ ein, so folgt $5 = 3C$ und somit $C = \frac{5}{3}$. Insgesamt folgt also

$$\frac{x^2+1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{x+2}.$$

Dies setzt man nun in das Integral ein und findet

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + \frac{5}{3}\ln(|x+2|) + C.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Wir berechnen die Partialsummen der Reihe. Da die Glieder unserer Reihe wegen den Logarithmengesetzen gleich

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

sind, ist die Partialsummen der ersten n Terme somit

$$\begin{aligned}s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= \big(\ln(2)-\ln(1)\big) + \big(\ln(3)-\ln(2)\big) + \ldots + \big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)\\ &= \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1),\end{aligned}$$

da sich alle anderen Terme gegenseitig aufheben. Der Grenzwert der Partialsummen (also die Reihe selber) ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}+1\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Die Reihe ist folglich divergent.

(b) Bei dieser Reihe können wir beispielsweise das Vergleichskriterium anwenden. Wir haben für die Glieder der Reihe

$$0 \le \frac{2}{(n+3)^2} \le \frac{2}{n^2}.$$

Nun wissen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

eine konvergente Reihe ist (Exponent ist $2 > 1$). Somit ist auch die gegebene Reihe konvergent

(c) Wir wenden das Quotientenkriterium an. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{3^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+2}}{3^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Nach dem Quotiientenkriterium ist die gegebene Reihe somit konvergent.

(d) Die vorliegende Reihe ist gleich $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ mit $b_n = \frac{1}{n\cdot 5^n} \geq 0$ und somit eine alternierende Reihe. Weil $b_1 > b_2 > \ldots$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, können wir das Konvergenzkriterium für alternierende Reihen anwenden und finden, dass die gegebene Reihe konvergent ist.

(e) Wir möchten das Konvergenzkriterium für alternierende Reihen anwenden. In unserem Fall haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n \qquad \text{mit } b_n = \frac{1}{n^\alpha} > 0.$$

Weiter gilt (egal für was für ein $\alpha > 0$), dass $1 > \frac{1}{2^\alpha} > \frac{1}{3^\alpha} > \frac{1}{4^\alpha} > \ldots$ also $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > \ldots$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ also $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Mit dem Konvergenzkriterium für alternierende Reihen folgt somit, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$$

konvergent ist für beliebige $\alpha > 0$.
Bemerkung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ist also für alle $\alpha > 0$ konvergent. Jedoch ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ nur für $\alpha > 1$ konvergent!