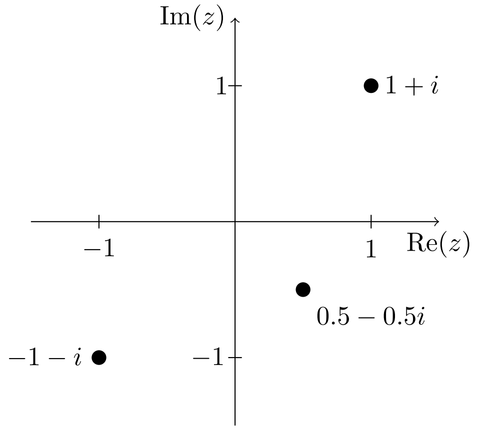
Lösungsvorschläge zur Serie 12

Aufgabe 1

(a) Es sind $z = 1 + i$, $-z = -1 - i$ und

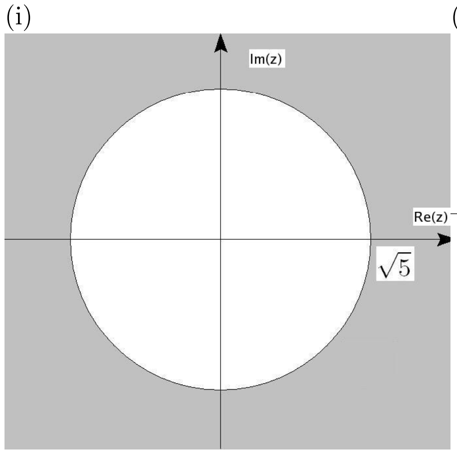
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i+1} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

In der Gauss'schen Zahlenebene eingezeichnet also

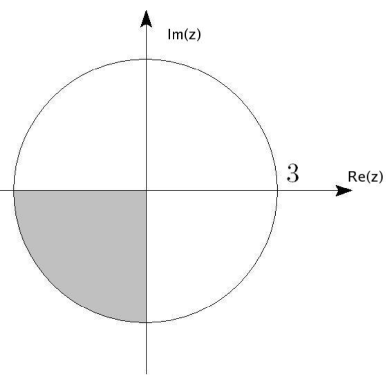


(b)

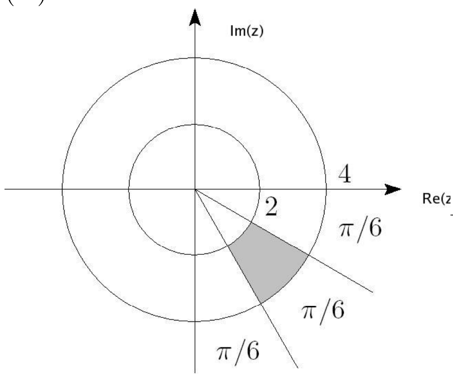
(i)



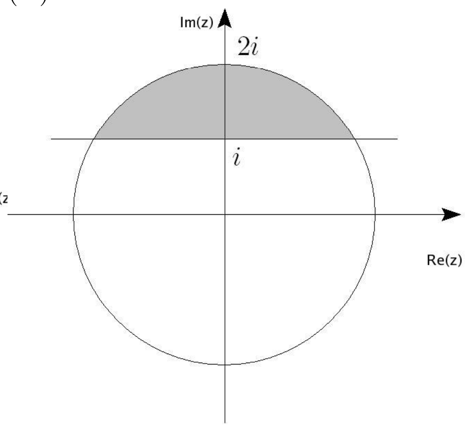
(ii)



(iii)



(iv)



Aufgabe 2

Damit $z_1 \cdot z$ auf dem gleichen Kreis K um den Nullpunkt wie z_1 liegt, muss der Betrag von $z_1 \cdot z$ und von z_1 gleich sein. Wir müssen also $|z_1 \cdot z| = |z_1|$ haben.

Wenn wir z in Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ schreiben, gilt allgemein, dass die Multiplikation $z_1 \cdot z$ die Zahl z_1 um das r-Fache streckt (falls $r > 1$) oder staucht (falls $0 < r < 1$), sowie um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn dreht. Denn es gilt ja

$$z_1 \cdot z = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot re^{i\varphi} = r_1 \cdot r \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi)},$$

welches eine komplexe Zahl mit Betrag $r_1 \cdot r$ und Argument $\varphi_1 + \varphi$ ist. Wir brauchen also für z, dass $r = 1$ ist, damit $z_1 \cdot z$ auf dem Kreis liegt. Das Argument φ von z spielt keine Rolle. Die möglichen z sind somit

$$\{z = e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Aufgabe 3

(a) Wir erweitern den ersten Bruch mit $1 + i$ und den zweiten Bruch mit $1 - i$ und erhalten

$$z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} - \frac{-2i}{2} = 2i$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) = 2$.

(b) Wir erweitern mit $-1 - 3i$ und erhalten

$$z = \frac{(3-12i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-39+3i}{10} = -\frac{39}{10} + i\frac{3}{10}$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = -\frac{39}{10}$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{3}{10}$.

(c) Wir rechnen zunächst die Potenz auf der linken Seite aus. Am einfachsten (Multiplikation!) ist es, zuerst in Exponentialdarstellung umzuformen. Der

$\sqrt{3}+i$ hat Betrag $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = 2$ und liegt im ersten Quadranten, also folgt für das Argument $\varphi = \arg(\sqrt{3}+i)$, dass

$$\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Somit ist $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Also erhalten wir

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6 e^{i\pi} = 64 \cdot (-1) = -64.$$

Insgesamt ist $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^6(1-i) = -64(1-i) = -64+64i$ und somit $\mathrm{Re}(z) = -64$ und $\mathrm{Im}(z) = 64$.

(d) Wir schreiben $-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$ zuerst in Exponentialdarstellung um. Der Betrag und das Argument sind

$$r = |-\sqrt{5}-i\sqrt{5}| = \sqrt{10} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Daraus erhalten wir

$$z^8 = \left(\sqrt{10}e^{i\frac{5}{4}\pi}\right)^8 = 10^4 e^{i\frac{8\cdot 5}{4}\pi} = 10^4 e^{10i\pi} = 10^4$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = 10^4$ und $\mathrm{Im}(z) = 0$.

(e) Wir schreiben die komplexen Terme zuerst in Exponentialdarstellung um

$$z = \left(\tfrac{1}{2}e^{i\frac{3}{14}\pi}\right)^7 \cdot 64 \cdot e^{i\frac{1}{6}\pi} = \tfrac{1}{128}e^{7i\frac{3}{14}\pi} \cdot 64 \cdot e^{i\frac{1}{6}\pi} = \tfrac{1}{2}e^{i(\frac{3}{2}+\frac{1}{6})\pi} = \tfrac{1}{2}e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

und erhalten somit

$$z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

mit $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{4}$ und $\mathrm{Im}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(f) Wir schreiben die komplexen Terme zuerst in Polardarstellung um

$$\begin{aligned} z &= e^{i\frac{5}{8}\pi}\sqrt{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)} \\ &= e^{i\frac{5}{8}\pi}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{i\frac{5}{8}\pi}\left(e^{i\frac{5}{4}\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{5}{8}\pi}e^{i\frac{5}{8}\pi} = e^{i\frac{5}{4}\pi} \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

und somit $\mathrm{Re}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\mathrm{Im}(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aufgabe 4

Wenn wir z_1 und z_2 in Polardarstellung $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ schreiben, sehen wir sofort, dass der Quotient $z = \frac{z_1}{z_2}$ die komplexe Zahl mit Betrag $\frac{r_1}{r_2}$ und Argument $\varphi_1 - \varphi_2$ ist, denn

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Damit $z = \frac{z_1}{z_2} \in B$ gilt, müssen wir also nur kontrollieren, ob

$$2 \leq \frac{r_1}{r_2} \leq 4 \qquad \text{und} \qquad \frac{\pi}{12} \leq \varphi_1 - \varphi_2 \leq \frac{5\pi}{12}$$

gilt. Für die verschiedenen Optionen berechnen wir

- $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$ und $z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Somit ist $z \in B$, da $\frac{r_1}{r_2} = 3$ und $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$.
- $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6} = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$. Somit ist $z \notin B$, da $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$.
- $z_1 = \frac{5}{4} e^{i\frac{\pi}{3}}$ und $z_2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Somit ist $z \notin B$, da $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{12} \hat{=} \frac{23\pi}{12}$.
- $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ und $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Somit ist $z \in B$, da $\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2}$ und $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 5

(a) Aus $z_1 + z_2 = 6$ und $z_1 \cdot z_2 = 10$ folgen

$$z_1 + z_2 = z_1 + \frac{10}{z_1} = 6 \implies z_1^2 - 6z_1 + 10 = 0.$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung erhalten wir

$$z_1 = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{36 - 40} = 3 \pm i.$$

Das heisst, z_1 muss entweder $3 + i$ oder $3 - i$ sein. Falls $z_1 = 3 + i$ folgt $z_2 = 3 - i$ aus der Bedingung $z_1 + z_2 = 6$. Falls $z_1 = 3 - i$ folgt auf die gleiche Weise $z_2 = 3 + i$. Somit ist die Antwort $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 3 - i$ oder $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 3 + i$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}(5\sqrt{3} + bi) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)(5\sqrt{3} + bi) \\ &= 15 + b\sqrt{3} i + 5\sqrt{3} i - b = (15 - b) + i \cdot (b\sqrt{3} + 5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Die Zahl ist reell, wenn der Imaginärteil verschwindet. Wir brauchen also

$$b\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 0 \implies b = -5.$$

(c) Eine Möglichkeit ist es, z in Exponentialdarstellung zu schreiben. Dann können wir den Betrag und das Argument direkt ablesen. Wir haben

$$z_1 = 4\Big(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Big) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Wir möchten auch z_2 in Exponentialdarstellung $z_2 = re^{i\varphi}$ umschreiben. Es gelten $r = \sqrt{1+3} = 2$ und $\sin(\varphi) = \dfrac{\sqrt{3}}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, das heisst $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Somit ist $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ und daraus folgt

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

Deshalb erhalten wir $|z| = 2$ und $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$.