Mathematik I (BIOL, HEST, PHAR) HS 2018
Prof. W. Farkas

Lösungsvorschläge zur Serie 2

Aufgabe 1

(a) Wir wissen, dass $\tan(x)$ die primitive Periode π besitzt und $\sin(x)$ die primitive Periode 2π. Daraus folgt (genau wie in Aufgabe 4, Serie 1), dass $\tan(2x)$ die primitive Periode $\pi/2$ und $\sin(3x)$ die primitive Periode $2\pi/3$ besitzt. Falls p ein Vielfaches von $\pi/2$ ist, gilt also $\tan(2(x+p)) = \tan(x)$, und falls p ein Vielfaches von $2\pi/3$ ist, gilt $\sin(3(x+p)) = \sin(3x)$.

Wir wollen $f(x+p) \stackrel{!}{=} f(x)$, das heisst $\tan(2(x+p)) + \sin(3(x+p)) \stackrel{!}{=} \tan(2x) + \sin(3x)$. Falls p **gleichzeitig** ein Vielfaches von $\pi/2$ und von $2\pi/3$ ist, dann ist diese Gleichung erfüllt. Das kleinstmögliche solche p ist 2π. Die primitive Periode von f ist also $p = 2\pi$.

(b)

- $f \circ g$ hat Funktionsvorschrift $f(g(x)) = \sqrt{\sin(x)}$ und ist somit für alle x mit $\sin(x) \geq 0$ definiert (in den Sinus können alle Zahlen eingesetzt werden, die Wurzel ist aber für negative Zahlen nicht definiert). Das heisst, der Definitionsbereich von $f \circ g$ ist $D_{f \circ g} = \ldots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots$.
  $g \circ f$ hat Funktionsvorschrift $g(f(x)) = \sin(\sqrt{x})$ und ist somit für alle x mit $x \geq 0$ definiert. Das heisst, der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist $D_{g \circ f} = [0, \infty)$.
- $f \circ g$ hat Funktionsvorschrift $f(g(x)) = \ln(x^3)$ und ist somit für alle x mit $x > 0$ definiert (der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert, wir müssen also $x^3 > 0$ haben). Das heisst, der Definitionsbereich von $f \circ g$ ist $D_{f \circ g} = (0, \infty)$.
  $g \circ f$ hat Funktionsvorschrift $g(f(x)) = (\ln(x))^3$ und ist somit für alle x mit $x > 0$ definiert (jede Zahl kann hoch 3 gerechnet werden, der Logarithmus ist aber nur für positive Zahlen definiert). Das heisst, der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist $D_{g \circ f} = (0, \infty)$.
- $f \circ g$ hat Funktionsvorschrift $f(g(x)) = \arccos(\frac{1}{2}x + 3)$. Da der Arkuskosinus nur für Zahlen in $[-1, 1]$ definiert ist, müssen wir also $\frac{1}{2}x + 3 \in [-1, 1]$ haben, das heisst $-8 \leq x \leq -4$. Der Definitionsbereich von $f \circ g$ ist $D_{f \circ g} = [-8, -4]$.
  $g \circ f$ hat Funktionsvorschrift $g(f(x)) = \frac{1}{2}\arccos(x) + 3$ und ist somit für alle x mit $x \in [-1, 1]$ definiert (Arkuskosinus ist nur für Zahlen in $[-1, 1]$ definiert). Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist $D_{g \circ f} = [-1, 1]$.

Aufgabe 2

(a) Die Funktion F_1 ist nicht umkehrbar, da die erste Bedingung einer umkehrbaren Funktion (siehe Folien Kapitel 1) nicht erfüllt ist. Und zwar schickt F_1 die zwei verschiedenen Elemente 1 und 3 des Definitionsbereichs auf den gleichen Funktionswert, nämlich $F_1(1) = F_1(3) = 2$. Auch F_3 ist aus dem gleichen Grund nicht umkehrbar, da wieder zwei verschiedene Elemente des Definitionsbereichs den gleichen Funktionswert besitzen ($F_3(1) = F_3(3) = 2$).

Die Funktion F_2 ist hingegen umkehrbar: Die Umkehrfunktion F_2^{-1} hat den Definitionsbereich $D_{F_2^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Funktionswerte sind $F_2^{-1}(1) = 4$, $F_2^{-1}(2) = 2$, $F_2^{-1}(3) = 1$ und $F_2^{-1}(4) = 3$.

(b) Das zweite Bild (b) zeigt keinen Graphen, da es unterschiedliche y-Koordinaten mit derselben x-Koordinate gibt (ein x-Wert im Definitionsbereich einer Funktion kann aber nur einen Funktionswert besitzen). Für die anderen Teilmengen tritt dieses Problem nicht auf. Deshalb sind sie der Graph einer Funktion. Die Funktion mit Graph wie in Bild (a) und (d) ist nicht umkehrbar, da verschiedene x-Werte auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden.

Aufgabe 3

Allgemein gilt: Eine reellwertige Funktion f mit Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f ist genau dann umkehrbar, wenn für jedes $y \in W_f$ (also $y = f(x)$ für ein $x \in D_f$) die Gleichung $y = f(x)$ **eindeutig** nach x aufgelöst werden kann. Wenn man in der so erhaltenen Gleichung x und y vertauscht, erhält man die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion. Diese wird Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = W_f$ und Wertebereich $W_{f^{-1}} = D_f$ haben.

(a) Falls $a = 0$ gilt, können wir die Gleichung $y = ax + 3$ nicht nach x auflösen, da wir durch Null dividieren müssten, in diesem Fall ist also f nicht umkehrbar. Das sieht man auch direkt: Falls $a = 0$, ist f die konstante Funktion $f(x) = 3$ und somit offensichtlich nicht umkehrbar. Falls $a \neq 0$ können wir $y = ax + 3$ nach x auflösen und erhalten $x = \frac{1}{a}y - \frac{3}{a}$. Die Umkehrfunktion ist also (x und y vertauschen) gegeben durch $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der Wertebereich von f und umgekehrt, hier ist also $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = W_f$.

(b) Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$, dann ist f nicht umkehrbar, da bsp. $f(2) = f(-2)$ gilt.

(c) Betrachten wir $f(x) = x^2$ nur auf dem Definitionsbereich $D_f = [0, \infty)$, dann ist die Funktion umkehrbar. Sei nämlich $y = f(x) = x^2 \in W_f = [0, \infty)$. Diese Gleichung lässt sich sich **eindeutig** nach x auflösen:

$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \overset{x \text{ muss in } D_f=[0,\infty) \text{ sein}}{\Longleftrightarrow} \quad x = \sqrt{y}.$$

Vertauschen wir in der letzten Gleichung die Variablen erhalten wir für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Der Definitionsbereich ist $D_{f^{-1}} = [0, \infty) = W_f$.

(d) Betrachten wir $f(x) = x^2$ nur auf dem Definitionsbereich $D_f = (-\infty, 0]$, dann ist die Funktion umkehrbar. Sei nämlich $y = f(x) = x^2 \in W_f = [0, \infty)$. Diese Gleichung lässt sich sich **eindeutig** nach x auflösen:

$$y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \quad \overset{x \text{ muss in } D_f = (-\infty, 0] \text{ sein}}{\Longleftrightarrow} \quad x = -\sqrt{y}.$$

Vertauschen wir in der letzten Gleichung die Variablen erhalten wir für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$. Der Definitionsbereich ist $D_{f^{-1}} = [0, \infty) = W_f$.

Aufgabe 4

(a)
- Falls $q = 1$, dann ist $a_n = 1$ für alle n und somit die Folge offensichtlich konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
- Falls $q = -1$, dann ist $(a_n)_n = 1, -1, 1, -1 \ldots$ und somit die Folge divergent, da sie immer zwischen 1 und -1 alterniert.
- Falls $|q| > 1$, ist die Folge divergent, da dann die Folge im Betrag unbegrenzt immer weiter wächst ($|a_1| < |a_2| < |a_3| < \ldots$).
- Falls $|q| < 1$, ist die Folge konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Das lässt sich auch formal aus der Definition eines Grenzwerts einer Folge schliessen (Kapitel 2, Folie 9): Sei $\varepsilon > 0$ eine (beliebig kleine) **feste** Zahl. Wir müssen $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass $|a_n - g| < \varepsilon$ für **alle Folgenglieder ab** dem Index n_0. Hier ist $|a_n - g| = |q^n - 0| = |q|^n$ und dies ist ab irgendeinem Index n_0 kleiner als ε, nämlich

  $$|q|^n \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \ln(|q|) \overset{!}{<} \ln(\varepsilon) \quad \overset{\ln(|q|)<0 \text{ da } |q|<1}{\Longleftrightarrow} \quad n \overset{!}{>} \ln(\varepsilon)/\ln(|q|).$$

  Das heisst, für alle Folgenglieder a_n mit Index $n > \ln(\varepsilon)/\ln(|q|)$ gilt $|a_n - g| = |q|^n < \varepsilon$. Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Wir haben mit der Formel für geometrische Summen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{=0 \text{ aus Teilaufgabe (a)}} = \frac{2}{3}.$$

(c) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^3 kürzen) und sehen direkt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 70n^2 + 210}{5n^3 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{70}{n} + \frac{210}{n^3}}{5 - \frac{1}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 - 0} = \frac{3}{5}.$$

(d) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^4 kürzen) und sehen direkt

$$a_n = \frac{5n^5 - 4n^3 + 3n}{n^4 + 2n^2 + 1} = \frac{5n - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

Auf der rechten Seite konvergiert der Nenner gegen 1, der Zähler jedoch divergiert nach ∞. Insgesamt ist also die Folge divergent nach ∞.

(e) Wir können a_n umformen (Bruch mit n^{10} kürzen) und sehen direkt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+1}{n^{10}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^{10}}}{1+\frac{1}{n^{10}}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$