Lösungsvorschläge zur Serie 6

Aufgabe 1

(a) Der Grenzwert des Zählers und des Nenners für $x \to \pi$ ist 0. Wir sind also in der Situation "$\frac{0}{0}$". Da der Grenzwert der Ableitung des Zählers durch der Ableitung des Nenners für $x \to \pi$ existiert, nämlich

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2},$$

dürfen wir die Regel von de l'Hôpital anwenden und finden

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Wir sind in der Situation "$\frac{0}{0}$". Leiten wir Zähler und Nenner ab, erhalten wir $\frac{4e^{2x}-4e^x}{6x}$. Beim Grenzwert von diesem neuen Ausdruck konvergieren Zähler und Nenner wieder gegen Null. Leiten wir Zähler und Nenner ein zweites Mal ab, erhalten wir $\frac{8e^{2x}-4e^x}{6}$, was für $x \to 0$ den Grenzwert $\frac{2}{3}$ besitzt (Grenzwert existiert also).

Somit darf die Regel von de l'Hôpital angewendet werden und es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-4e^x+2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}-4e^x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{8e^{2x}-4e^x}{6} = \frac{2}{3}.$$

(c) Hier können wir "direkt einsetzen". Der Zähler des Bruchs geht für $x \to 0$ gegen $\sin(0) = 0$ und der Nenner gegen $0 - 1 = -1$. Somit ist der gesuchte Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 0$.

Achtung: De l'Hôpital ist hier **nicht** anwendbar, da keine Situation "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" oder "$\frac{0}{0}$" vorliegt! Mit de l'Hôpital würde wir den **falschen** Grenzwert 1 erhalten.

(d) Wir sind in der Situation "$\frac{\infty}{\infty}$" und möchten die Regel von de l'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\ln(x)}{x^2} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+\frac{x+1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{2x} + \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\to 0} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{2x}.$$

Der Grenzwert auf der rechten Seite ist (de l'Hôpital, Situation "$\frac{\infty}{\infty}$")

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{2x} \overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2} = 0.$$

Der Grenzwert existiert somit und die Anwendung von de l'Hôpital in $(**)$ und $(*)$ ist nachträglich gerechtfertigt. Also ist $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)(x+1)}{x^2} = 0$.

(e) Dies ist ein Grenzwert in der Situation "1^∞".
In der Nähe von $\frac{\pi}{4}$ ist der $\tan(x)$ positiv (denn $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$) und somit können wir zuerst den Logarithmus der Funktion bilden und folgenden Grenzwert berechnen

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln\Big(\big(\tan x\big)^{\tan(2x)}\Big) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\ln(\tan x).$$

Dies ist ein Grenzwert in der Situation "$\infty \cdot 0$", welchen wir zuerst in die Situation "$\frac{0}{0}$" umformen

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\ln(\tan x) \quad = \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\tan(2x)}}.$$

Jetzt können die Regel von de l'Hôpital verwenden

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\tan(2x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2(2x)}} = -1 \quad \text{(Grenzwert existiert, also war de l'Hôpital erlaubt).}$$

Wir haben also herausgefunden, dass der Grenzwert des Logarithmus der Funktion gleich -1 ist. Alles in allem ist somit ist der gesuchte Grenzwert $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \big(\tan x\big)^{\tan(2x)} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Aufgabe 2

(a) Da f für $x \neq \pi$ nach Definition stetig ist (Elementarfunktion), bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = \pi$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{b\cos(x)}{-3x^2} = \frac{-b}{-3\pi^2} \quad \text{(Grenzwert existiert, also war de l'Hôpital erlaubt).}$$

Dieser Ausdruck muss gleich $f(\pi) = \frac{1}{\pi^2}$ sein. Daraus folgt

$$b = 3.$$

(b) Hier verwenden wir wieder die Regel von de l'Hôpital und finden

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\log(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x = 0.$$

Dies zeigt die Stetigkeit von f in $x_0 = 0$, da dort der linksseitige Grenzwert offensichtlich ebenfalls gleich null ist und auch $f(0) = 0$.

Aufgabe 3

(a) Die Funktion f ist nicht symmetrisch, denn es gilt beispielsweise

$$f(1) = 0 \qquad \text{aber} \qquad f(-1) = 2.$$

Nullstellen von f müssen $f(t) = 0$ erfüllen, also $t^2 - \frac{1}{t} = 0$. Dies ist nur für $t = 1$ erfüllt. Die einzige Nullstelle von f ist somit bei $t = 1$.

Die einzige mögliche Polstelle ist bei $t = 0$ (überall sonst ist ja die Funktion definiert und hat einen endlichen Funktionswert). Damit $t = 0$ eine Polstelle ist, muss der Grenzwert von $f(t)$ für t gegen 0 entweder ∞ oder $-\infty$ sein. In der Tat ist

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \left| t^2 - \frac{1}{t} \right| = \infty.$$

Somit ist bei $t = 0$ die einzige Polstelle von f.

Der Wertebereich von f lässt sich jetzt einfach bestimmen: Die Funktion besitzt nach Definition keine negativen Werte. Weiter hat sie eine Nullstelle (0 ist also im Wertebereich) und konvergiert an ihrer Polstelle gegen ∞. Da die Funktion f (als Komposition von Elementarfunktionen) auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, muss also f alle positiven Werte annehmen (der Graph von f hat keine Sprünge). Der Wertebereich ist also $W = [0, \infty)$.

(b) Zuerst schreiben wir die Funktion f in eine Funktion ohne Betrag um. Wir beachten, dass für $t \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \left|t^2 - \frac{1}{t}\right| &= t^2 - \frac{1}{t} \quad \text{falls } t^2 \geq \frac{1}{t} \\ \left|t^2 - \frac{1}{t}\right| &= \frac{1}{t} - t^2 \quad \text{falls } t^2 < \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Beim Auflösen der beiden Ungleichungen $t^2 \geq \frac{1}{t}$ und $t^2 < \frac{1}{t}$ nach t, müssen wir auf das Vorzeichen von t achten:

$$\begin{array}{lllllll} \text{Falls } t > 0 \text{ gilt:} & t^2 \geq \frac{1}{t} & \Longleftrightarrow & t^3 \geq 1 & \Longleftrightarrow & t \geq 1 & \\ & t^2 < \frac{1}{t} & \Longleftrightarrow & t^3 < 1 & \Longleftrightarrow & 0 < t < 1 & (\text{da auch } t > 0) \\ \text{Falls } t < 0 \text{ gilt:} & t^2 \geq \frac{1}{t} & \Longleftrightarrow & t^3 \leq 1 & \Longleftrightarrow & t < 0 & (\text{da für } t < 0 \text{ immer erfüllt}) \\ & t^2 < \frac{1}{t} & \Longleftrightarrow & t^3 > 1 & \lightning & (\text{kann nicht erfüllt werden da } t < 0). & \end{array}$$

Wir fassen zusammen

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - \frac{1}{t} & \text{für } t \geq 1 \text{ und } t < 0 \\ \frac{1}{t} - t^2 & \text{für } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Nun sehen wir sofort, wo f differenzierbar ist: Die beiden Funktionen $t^2 - \frac{1}{t}$ und $\frac{1}{t} - t^2$ sind differenzierbar (in allen $t \neq 0$). Somit ist auch f überall differenzierbar ausser eventuell an der "Klebestelle" $t = 1$ (in $t = 0$ müssen wir nicht kontrollieren, da dort f nicht einmal definiert ist, also auch nicht differenzierbar sein kann). An der Klebestelle gilt

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{|t^2-\frac{1}{t}|-0}{t-1} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{t^2-\frac{1}{t}}{t-1} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{2t+\frac{1}{t^2}}{1} = 3$$

sowie

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{|t^2-\frac{1}{t}|-0}{t-1} = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \frac{\frac{1}{t}-t^2}{t-1} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \frac{-\frac{1}{t^2}-2t}{1} = -3.$$

Somit existiert $\lim_{t\to 1} \dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ nicht (links- und rechtsseitiger Grenzwert sind verschieden) und f ist nicht differenzierbar in $t = 1$. Alles in allem ist f differenzierbar in $D \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(c) Die Ableitung f' hat Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ wegen (b). Mit der Darstellung von f ohne Betrag aus Teilaufgabe (b) sehen wir direkt, dass

$$f'(t) = \begin{cases} 2t + \frac{1}{t^2}. & \text{für } t > 1 \text{ und } t < 0 \\ -\frac{1}{t^2} - 2t & \text{für } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Auf allen Abschnitten von $f'(t)$ ist somit $f'(t) = 0$ gleichbedeutend mit $2t + \frac{1}{t^2} = 0$. Daraus folgt $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Der einzige kritische Punkt von f ist also $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

(d) Es gilt $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \left|t^2 - \dfrac{1}{t}\right| = \infty$ und genauso $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \infty$. Die Funktion f ist also stetig (da Elementarfunktion), nie negativ und geht für $t \to \infty$, $t \to -\infty$ und $t \to 0$ (Polstelle) gegen unendlich. Bei $t = 1$ ist die einzige Nullstelle und $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ist der einzige kritische Punkt (Steigung von f ist dort Null). Somit muss f monoton fallend in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, monoton steigend in $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$, monoton fallend in $(0, 1)$ und monoton steigend in $(1, \infty)$ sein. Insbesondere ist bei $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ein relatives Minimum und bei $t = 1$ ein absolutes Minimum.

(e)