

Lösungsvorschläge zur Serie 9

Aufgabe 1

In der Musterlösung der Serie 8 werden diese beiden Stammfunktionen mit partieller Integration ausgerechnet. Wir zeigen hier, wie man sie mit einer Substitution ausrechnen kann.

- (a) Wir verwenden die Substitution $u = x + 1$. Somit ist $\frac{du}{dx} = 1$ also $du = dx$. Mit dieser Substitution ist $x = u - 1$ und somit ist die gesuchte Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^4} dx &= \int \frac{u-1}{u^4} du = \int (u^{-3} - u^{-4}) du \\ &= -\frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{3}u^{-3} + C \\ &= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + C \quad \text{mit Rücksubstitution} \\ &= -\frac{3(x+1) - 2}{6(x+1)^3} + C = -\frac{3x+1}{6(x+1)^3} + C.\end{aligned}$$

Diese stimmt mit der in Serie 8 mittels partieller Integration ausgerechneten Stammfunktion überein.

- (b) Zuerst verwenden wir den Hinweis.

$$\int \cos^3(x) dx = \int \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)} \cos(x) dx = \int \cos(x) dx - \int \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

Das erste Integral ist $\sin(x) + C_1$. Im zweiten Integral substituieren wir

$$u = \sin(x) \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dx} = \cos(x), \quad \text{d.h.} \quad du = \cos(x) dx.$$

Daraus folgt

$$\int \underbrace{\sin^2(x)}_{=u^2} \underbrace{\cos(x) dx}_{=du} = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C_2 = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C_2,$$

wobei der letzte Schritt aus der Rücksubstitution folgt. Insgesamt ist also (wir fassen die Integrationskonstanten zusammen)

$$\int \cos^3(x) dx = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C,$$

wie in Serie 8.

Aufgabe 2

- (a) Wir substituieren $u = \sqrt{x}$. Damit gilt $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$ und somit $dx = 2udu$. Es folgt

$$\int \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{=e^u} \underbrace{dx}_{=2u du} = 2 \int ue^u du.$$

Die Stammfunktion auf der rechten Seite können wir mit partieller Integration berechnen

$$\int u \cdot e^u du = u \cdot e^u - \int e^u du = ue^u - e^u + C = (u - 1)e^u + C.$$

Insgesamt also

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int ue^u du = 2(u - 1)e^u + C.$$

Mit der Rücksubstitution erhalten wir

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

- (b) Wir substituieren $u = \ln(x)$. Damit gilt $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ und somit $du = \frac{1}{x}dx$. Es folgt

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{=1/u} \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{=du} = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + C = \ln(|\ln(x)|) + C,$$

mit Rücksubstitution im letzten Schritt. Dasselbe erhalten wir auch durch Anwendung der Formel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

aus der Vorlesung (hier angewendet für $f(x) = \ln(x)$).

- (c) Man kann diese Stammfunktion mit einer Partialbruchzerlegung ausrechnen. Es geht aber auch mit einer Substitution und zwar substituieren wir $u = x^2 - 1$. Damit gilt $\frac{du}{dx} = 2x$ und somit $du = 2x dx$. Es folgt

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x^2 - 1}}_{=1/u} \underbrace{x dx}_{\frac{1}{2} du} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(|u|) + C = \frac{1}{2} \ln(|x^2 - 1|) + C.$$

- (d) Mit dem Hinweis und der Formel aus der Vorlesung folgt

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} dx = \int 1 dx - \int \frac{2}{x^2 + 1} dx = x - 2 \arctan(x) + C.$$

- (e) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor.

Der Nenner $Q(x) = x^2 + x - 2$ erfüllt $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 > 0$, hat also zwei reelle Nullstellen. Und zwar ist $Q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$3x + 1 = A(x + 2) + B(x - 1) = (A + B)x + (2A - B).$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem $A + B = 3$ und $2A - B = 1$ mit Lösung $A = 4/3$ und $B = 5/3$. Es folgt also

$$\frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{4/3}{x - 1} + \frac{5/3}{x + 2}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist damit

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} dx &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{5}{3} \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= \frac{4}{3} \ln(|x - 1|) + \frac{5}{3} \ln(|x + 2|) + C. \end{aligned}$$

- (f) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 2 und Zähler vom Grad 1. Wir gehen wie in der Vorlesung vor.

Der Nenner $Q(x) = x^2 - 4x + 4$ erfüllt $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$, hat also eine doppelte Nullstelle. Und zwar ist $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist somit

$$\frac{x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$x = A(x - 2) + B = Ax + (B - 2A).$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem $A = 1$ und $B - 2A = 0$ mit Lösung $A = 1$ und $B = 2$. Es folgt also

$$\frac{x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist damit

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x - 2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx \\ &= \ln(|x - 2|) - 2 \frac{1}{x - 2} + C. \end{aligned}$$

- (g) Es handelt sich hier um den Fall einer Integration einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner vom Grad 3. Der Zähler ist zwar keine Konstante wie in der Vorlesung sondern vom Grad 1. Dieselbe Vorgehensweise funktioniert aber. Wir gehen wie in der Vorlesung vor.

Durch raten finden wir eine erste Nullstelle $x = 1$ des Nenners $x^3 - 1$. Es gilt somit $x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ für gewisse Zahlen a, b, c . Klammern wir aus, so sehen wir, dass $x^3 - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ gelten muss. Daraus folgt mit Koeffizientenvergleich zuerst $a = 1$ und daraus $b = 1$ und daraus $c = 1$. Somit ist

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Das Polynom zweiten Grades $x^2 + x + 1$ hat keine Nullstellen. Somit ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1},$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{R}$. Bringen wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner, erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} x &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\ &= (A + B)x^2 + (A - B + C)x + (A - C). \end{aligned}$$

Vergleichen der Koeffizienten liefert das Gleichungssystem $A + B = 0$, $A - B + C = 1$ und $A - C = 0$ mit Lösung $A = 1/3$, $B = -1/3$ und $C = 1/3$. Insgesamt folgt also

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1/3}{x - 1} + \frac{-1/3x + 1/3}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{3} \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Dies setzt man nun in das Integral ein und erhält

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Das erste Integral ist

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx = \frac{1}{3} \ln|x - 1| + C.$$

Das zweite Integral ist das Integral einer gebrochen rationalen Funktion mit Nenner $Q(x) = x^2 + x + 1$ vom Grad 2. Wir beachten, dass für $Q(x)$ gilt $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$, das heisst $Q(x)$ hat keine reellen Nullstellen. Wir müssen also die Funktion im zweiten Integral in die Form $c \cdot \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{\text{Zahl}}{Q(x)}$ bringen. Es ist $Q(x) = x^2 + x + 1$ und $Q'(x) = 2x + 1$. Wir möchten also

$$c \cdot \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{\text{Zahl}}{Q(x)} = \frac{c(2x + 1) + \text{Zahl}}{x^2 + x + 1} \stackrel{!}{=} \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Daraus folgt $c = -\frac{1}{2}$ und $\text{Zahl} = \frac{3}{2}$. Das zweite Integral ist also mit der

Formel aus der Vorlesung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \int \frac{-x+1}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{3} \int \left(-\frac{1}{2} \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{6} \int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{1}{6} \ln(|Q(x)|) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx \\
 &= -\frac{1}{6} \ln(|x^2+x+1|) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{6} \ln(|x^2+x+1|) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist also die gesuchte Stammfunktion

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \ln(|x-1|) - \frac{1}{6} \ln(|x^2+x+1|) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Aufgabe 3

- (a) Mittels partieller Integration finden wir, für beliebiges $b > 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^b f(x) dx &= \int_0^b a^2 x e^{-ax} dx \\
 &= -ax e^{-ax} \Big|_0^b + \int_0^b a e^{-ax} dx \\
 &= -ax e^{-ax} \Big|_0^b - e^{-ax} \Big|_0^b \\
 &= 1 - (ab+1)e^{-ab}.
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$I_a = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - (ab+1)e^{-ab}) = 1,$$

denn

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (ab+1)e^{-ab} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{ab+1}{e^{ab}} \stackrel{\text{H\^opital}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{a}{ae^{ab}} = 0.$$

Bemerkung: Im Zwischenschritt, wo l'H\^opital angewendet wird, m\^ussen wir Z\^ahler und Nenner nach b ableiten, der Grenzwert wird ja f\^ur $b \rightarrow \infty$ berechnet.

- (b) Die Funktion $f_a(x)$ ist f\^ur $x \geq 0$ nie negativ. Der Fl\^acheninhalt $|F_a|$ ist somit gegeben durch das bestimmte Integral von f_a zwischen 1 und 2.

Wir rechnen wie in der Lösung von (a) mit der unteren Grenze 1 und der oberen Grenze 2

$$\begin{aligned} |F_a| &= \int_1^2 a^2 x e^{-ax} dx \\ &= 1 - (2a + 1)e^{-2a} - 1 + (a + 1)e^{-a} \\ &= (a + 1)e^{-a} - (2a + 1)e^{-2a}. \end{aligned}$$

- (c) Wir betrachten den Flächeninhalt $|F_a|$ aus (b) als eine Funktion h in Abhängigkeit von a . Diese Funktion ist (siehe (b))

$$h(a) = (a + 1)e^{-a} - (2a + 1)e^{-2a}.$$

Diese Funktion h möchten wir maximieren. Es ist $h'(a) = -ae^{-a} + 4ae^{-2a} = (4 - e^a)ae^{-2a}$. Damit verschwindet die Ableitung von h genau dann, wenn $e^a = 4$, also für $a = 2 \ln(2)$.

Weiter ist die Ableitung von h positiv, falls $a < 2 \ln(2)$ und negativ, falls $a > 2 \ln(2)$. Daher liegt in $a = 2 \ln(2)$ ein lokales Maximum von h .

Wir können zeigen, dass in $a = 2 \ln(2)$ sogar ein globales Maximum von h liegt. Die Funktion $h(a)$ hat nämlich Definitionsbereich $(0, \infty)$ (es ist ja $a > 0$), sie ist positiv ($h(a)$ ist ja ein Flächeninhalt), sie ist stetig, sie hat eine einzige kritische Stelle bei $a = 2 \ln(2)$ (die ein lokales Maximum ist) und gegen den Rand des Definitionsbereichs gilt $\lim_{a \rightarrow 0} h(a) = 0$ und $\lim_{a \rightarrow \infty} h(a) = 0$. Bei $a = 2 \ln(2)$ muss also ein globales Maximum der Funktion $h(a) = |F_a|$ sein.

Der Flächeninhalt zwischen 1 und 2 ist somit für die Funktion $f_a(x)$ mit $a = 2 \ln(2)$ maximal.