Prof. W. Farkas **ETH Zürich, Dezember 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Probetest Mathematik I, Kapitel 1-5, Lösungen

---

1. (*8 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Der Grenzwert ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{18 + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{n^5}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

b) (*1 Punkt*) Die Ableitung ist mit Produktregel und Kettenregel

$$f'(x) = 2\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x^{\frac{3}{2}}) + \sqrt{x}\cos(x^{\frac{3}{2}})\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big) = \frac{\sin(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{x}} + 3x\cos(x^{\frac{3}{2}}).$$

c) (*1 Punkt*) Die Ableitung f' von f ist mit Quotientenregel $f'(x) = \frac{e^{2x}-2(1+x)e^{2x}}{e^{4x}}$, gekürzt also $f'(x) = \frac{-1-2x}{e^{2x}}$. Es gilt somit $f'(x) > 0$ (also streng monoton wachsend) genau dann, wenn $-1-2x > 0$, und $f'(x) < 0$ (also streng monoton fallend) genau dann, wenn $-1-2x < 0$. Das heisst, dass f für $x > -\frac{1}{2}$ streng monoton wachsend ist und für $x < -\frac{1}{2}$ streng monoton fallend. Das gesuchte c ist also

$$c = -\frac{1}{2}.$$

d) (*3 Punkte*) **Zum ersten Teil:** Damit f an der Stelle $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$$

gelten. In diesem Fall ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

und mit l'Hôpital

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a\sin(x)}{\ln(1+x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a\cos(x)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{a\cos(0)}{1} = a.$$

Daraus folgt

$$a = 1.$$

Zum zweiten Teil: Damit f an der Stelle $x = -\pi$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x)$$

gelten. Es ist

$$\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} bx^2 + x + d = b\pi^2 - \pi + d$$

$$\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} \cos(x) = \cos(-\pi) = -1.$$

Damit f an der Stelle $x = -\pi$ zusätzlich differenzierbar ist, muss die Ableitung von links $\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x<-\pi}} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x-(-\pi)}$ mit der Ableitung von rechts $\lim_{\substack{x\to -\pi\\ x>-\pi}} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x-(-\pi)}$ übereinstimmen. Die Ableitung von links an der Stelle $x = -\pi$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion $bx^2 + x + d$ an der Stelle $x = -\pi$, also $-2b\pi + 1$. Die Ableitung von rechts an der Stelle $x = -\pi$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion $\cos(x)$ an der Stelle $x = -\pi$, also $-\sin(-\pi) = 0$. Insgesamt hat man die Bedingungen

$$b\pi^2 - \pi + d = -1 \qquad \text{und} \qquad -2b\pi + 1 = 0.$$

Daraus folgt

$$b = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{und} \qquad d = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

e) (*1 Punkt*) Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 e^x\,dx &= x^2 e^x\Big|_1^3 - \int_1^3 2xe^x\,dx \\ &= (9e^3 - e) - 2\left(xe^x\Big|_1^3 - \int_1^3 e^x\,dx\right) = (9e^3 - e) - 2(3e^3 - e) + 2e^x\Big|_1^3 \\ &= 5e^3 - e.\end{aligned}$$

f) (*1 Punkt*) Die Aufgabe folgt mit Partialbruchzerlegung. Der Nenner $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ hat eine doppelte Nullstelle und zwar gilt $Q(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Der

Ansatz ist also $\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$. Durch Koeffizientenvergleich folgt $A = 1$ und $B = -1$ und somit ist die gesuchte Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx &= \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx \\ &= \ln(|x+2|) - \frac{-1}{x+2} + C \\ &= \ln(|x+2|) + \frac{1}{x+2} + C.\end{aligned}$$

2. (*8 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Der Grenzwert ist mit l'Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

b) (*1 Punkt*) Da $\cos(\pi + 2\pi n) = -1$ für alle n gilt, ist der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{2n^2}\cos(\pi+2\pi n) = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{2n^2}\cdot(-1) = \lim_{n\to\infty} -\frac{12+\frac{5}{n^2}}{2} = -\frac{12}{2} = -6.$$

c) (*1 Punkt*) In der Nähe von x_0 ist die Funktion f auf der linken Seite fallend (wegen $f'(x) < 0$ für alle x in $[1, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}))$ und auf der rechten Seite wachsend (wegen $f'(x) > 0$ für alle x in $(1+\frac{1}{\sqrt{3}}, 2])$. Somit ist in x_0 ein relatives Minimum. (Die Funktion f ist auch stetig mit stetiger Ableitung).

d) (*2 Punkte*) Damit f an der Stelle $x = 0$ stetig ist, muss

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$$

gelten. In diesem Fall ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 3\cos(2x) = 3\cos(0) = 3$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 5x^2 + a + bx = a.$$

Daraus folgt

$$a = 3.$$

Damit f an der Stelle $x=0$ zusätzlich differenzierbar ist, muss die Ableitung von links $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ mit der Ableitung von rechts $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ übereinstimmen. Die Ableitung von links an der Stelle $x=0$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion $3\cos(2x)$ an der Stelle $x=0$, also $-6\sin(2\cdot 0)=0$. Die Ableitung von rechts an der Stelle $x=0$ der Funktion f ist die Ableitung der Funktion $5x^2+a+bx$ an der Stelle $x=0$, also $10\cdot 0+b=b$.

$$b=0.$$

e) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_0^{1/c} e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}e^{cx}\Big|_0^{1/c} = \frac{1}{c}(e-1).$$

Also muss gelten

$$\frac{1}{c}(e-1) \overset{!}{=} 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c=\frac{e-1}{7}.$$

f) (*2 Punkte*) Der Nenner $Q(x)=x^2-3x+2$ besitzt die zwei Nullstellen $x=2$ und $x=1$, also ist $Q(x)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Die rationale Funktion f muss also in die Form $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$ umgeschrieben. Es ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} \overset{!}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x-(A+2B)}{x^2-3x+2}.$$

und somit $A+B=5$ und $A+2B=6$. Es folgt $A=4$ und $B=1$. Also ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x-2}+\frac{1}{x-1}.$$

Die gesuchte Stammfunktion ist somit

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx = \int \frac{5x-6}{x^2-3x+2}\,dx &= 4\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= 4\ln|x-2| + \ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

3. (*10 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Die Ableitung ist mit Kettenregel

$$f'(x) = 2x\ln(x)+x.$$

b) (*1 Punkt*) Die Ableitung f' von f ist $f'(x) = 2x\ln(x) + x$, siehe Aufgabe **1a)**. Es gilt also $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $2\ln(x)+1 = 0$, da $x > 0$. Die einzige kritische Stelle ist also bei $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. Tatsächlich ist das auch ein Minimum, da $f'(x) < 0$ für $x < e^{-\frac{1}{2}}$ und $f'(x) > 0$ für $x > e^{-\frac{1}{2}}$. Das gesuchte a ist also

$$a = -\frac{1}{2}.$$

c) (*1 Punkt*) Die zweite Ableitung von f ist wieder mit Kettenregel $f''(x) = 2\ln(x)+3$. Somit gilt $f''(x) > 0$ (also nach links gekrümmt) genau dann, wenn $x > e^{-\frac{3}{2}}$, und $f''(x) < 0$ (also nach rechts gekrümmt) genau dann, wenn $x < e^{-\frac{3}{2}}$. Daraus folgt

$$c = -\frac{3}{2}.$$

d) (*1 Punkt*) Da f für $x \neq 1$ nach Definition stetig ist, bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = 1$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{b}{2x^2} = \frac{b}{2} \overset{!}{=} 2 = f(1).$$

Daraus folgt

$$b = 4.$$

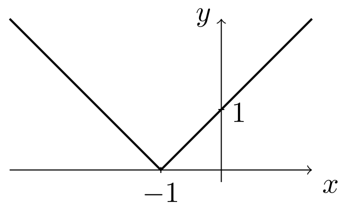
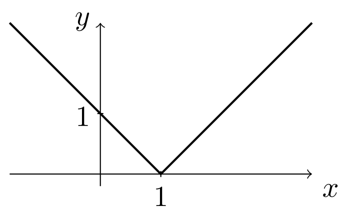
e) (*1 Punkt*) Mit partieller Integration und dem Hinweis folgt

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) - 2\int x\cos(x)\,dx = (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C.$$

f) (*2 Punkte*) Aus $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ folgen die Bedingungen $b + c = 1$ und $b + \frac{c}{2} = 2$. Somit ist

$$b = 3 \qquad \text{und} \qquad c = -2.$$

g) (*2 Punkte*) Die Funktion $f(x) = |1 + x|$ hat in 1 den Wert $f(-1) = 0$, was einen der beiden Graphen direkt ausschliesst. Der andere ist korrekt. Weiter ist f in 0 und 1 differenzierbar mit Ableitung 1.

richtig	**falsch**	
$\otimes$	$\bigcirc$	Der Graph von f ist 
$\bigcirc$	$\otimes$	Der Graph von f ist 
$\bigcirc$	$\otimes$	Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.
$\otimes$	$\bigcirc$	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.

h) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2,$$

wie man direkt aus dem Graphen von f ablesen kann (siehe Aufgabe **1h)**) oder auch durch Ausrechnen des Integrals.