Prof. W. Farkas **ETH Zürich, Dezember 2018**

D-BIOL, D-CHAB, D-HEST

Probetest Mathematik I, Kapitel 1-5

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	

Nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
Total	

Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben in 90 Minuten lösen können.

Aufgaben

Die Antworten in diesen Aufgaben müssen Sie **nicht** begründen. Schreiben Sie die Antworten **vollständig gekürzt und vereinfacht** direkt auf das Aufgabenblatt. Antworten auf anderen Blättern werden nicht bewertet. **Geben Sie am Ende nur die Aufgabenblätter ab**.

1. (*8 Punkte*) **Prüfung Sommer 2017, Aufgabe 1 ohne Teilaufgaben g), h), i)**

a) Sei $(a_n)_n$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \frac{18n^5 + 2n^2 - 7}{3n^5 - 2n^4 + 6n}.$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\hspace{4cm}}$$

b) Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) = 2\sqrt{x}\sin(x^{\frac{3}{2}})$ für $x > 0$. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

$$f'(x) = \underline{\hspace{12cm}}$$

c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1+x}{e^{2x}}$ ist für $x < c$ streng monoton wachsend und für $x > c$ streng monoton fallend. Bestimmen Sie c.

$$c = \underline{\hspace{4cm}}$$

d) Seien a, b, $d \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + x + d & \text{für } x < -\pi \\ \cos(x) & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{a\sin(x)}{\ln(1+x)} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig ist?

$$a = \underline{\hspace{4cm}}$$

Wie müssen b und d gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = -\pi$ stetig **und** differenzierbar ist?

$$b = \underline{\hspace{4cm}} \qquad \text{und} \qquad d = \underline{\hspace{4cm}}$$

e) Berechnen Sie folgendes bestimmte Integral.

$$\int_1^3 x^2 e^x \, dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

f) Berechnen Sie folgendes unbestimmte Integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+4} \, dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

2. (*8 Punkte*) **Prüfung Winter 2018, Aufgabe 1 ohne Teilaufgabe g), h)**

a) Berechnen Sie folgenden Grenzwert.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Sei $(a_n)_n$ die Folge gegeben durch

$$a_n = \frac{12n^2 + 5}{2n^2} \cos(\pi + 2\pi n).$$

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ gilt $f'(x) < 0$ für alle x in $[1, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $f'(x) > 0$ für alle x in $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2]$. Markieren Sie die korrekte Antwort.

Die Funktion f besitzt in $x_0 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ein rel. Minimum/ein rel. Maximum/einen Sattelpunkt.

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + a + bx & \text{für } x \geq 0 \\ 3\cos(2x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Wie müssen a und b gewählt werden, damit die Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig **und** differenzierbar ist?

$a =$ ____________ und $b =$ ____________

e) Bestimmen Sie für welches $c \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_0^{1/c} e^{cx} \, dx = 7$$

erfüllt ist.

$c =$ ____________

Bitte wenden!

f) Sei f die Funktion gegeben durch $f(x) = \dfrac{5x-6}{x^2-3x+2}$. Die Partialbruchzerlegung von f ist

$$\frac{5x-6}{x^2-3x+2} = \underline{\hspace{6cm}}.$$

Die Stammfunktion der Funktion f ist

$$\int f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}.$$

3. (*10 Punkte*) Prüfung Winter 2017, Aufgabe 1 ohne Teilaufgabe g)

Es sei $e = 2.718...$ die Eulersche Zahl.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ und Definitionsbereich $D = (0, \infty)$.

$$f'(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion f mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe **3a)** besitzt bei $x_0 = e^a$ ein Minimum. Bestimmen Sie den Exponenten a.

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe **3a)** ist für $0 < x < e^c$ nach rechts gekrümmt und für $x > e^c$ nach links gekrümmt. Bestimmen Sie den Exponenten c.

$$c = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei die Funktion f mit Definitionsbereich $(0, \infty)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b\ln(x)}{x^2-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich $(0, \infty)$ ist?

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

e) Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2\,\cos(x)$.

$$\int f(x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}}$$

Hinweis: Es gilt $\int x\sin(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$.

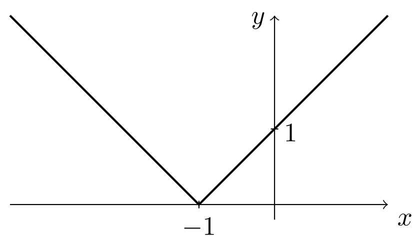
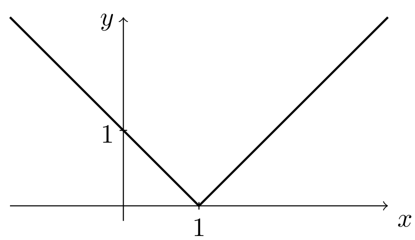
f) Seien $b, c \in \mathbb{R}$ fest. Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{bx + c}{x}.$$

Wir möchten, dass $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ gilt. Wie müssen b und c gewählt werden?

$$b = \underline{\hspace{3cm}} \qquad \text{und} \qquad c = \underline{\hspace{3cm}}.$$

g) Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = |1 + x|$.
Welche der folgenden Aussagen sind **richtig** und welche **falsch**?
(Es können mehrere Antworten richtig sein.)

richtig	**falsch**	
○	○	Der Graph von f ist 
○	○	Der Graph von f ist 
○	○	Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.
○	○	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.

h) Sei f wie in der obigen Aufgabe **3g)** die Funktion mit $f(x) = |1 + x|$.
Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underline{\hspace{3cm}}.$$